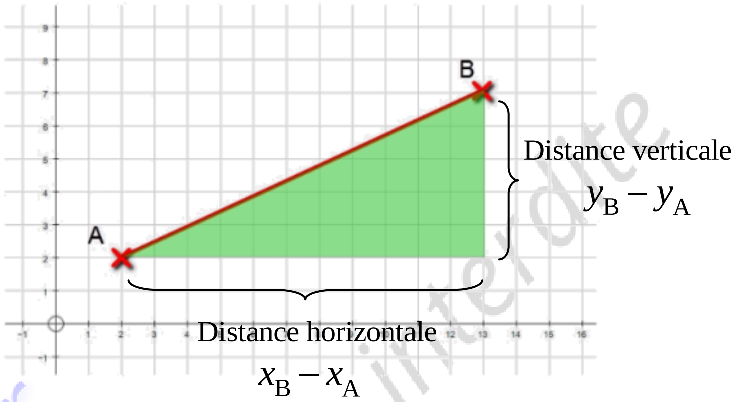
➤➤ Module 1 : Notion de dérivée ➤➤

Consulter ce module sur Oxogone.fr

1°) Pente et coefficient directeur



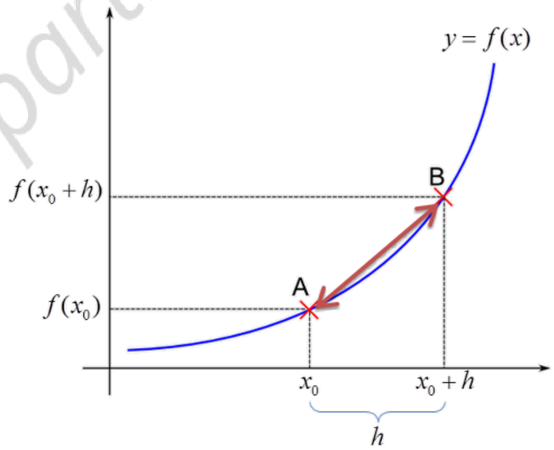
➤ Notion de pente :

La **pente** d'une droite (AB) est la même en chacun de ses points. Elle est égale à son **coefficient directeur** :

$$\mathrm{m} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

2°) Nombre dérivé

➤ Définition du nombre dérivé :



La pente d'une courbe représentative d'une fonction f est différente en chacun de ses points.

Si on veut évaluer la pente de la courbe en un point A d'abscisse x_0, on va considérer un autre point B de la courbe d'abscisse $x_0 + h$ ($h \in \mathbb{R}$). Cette pente sera alors la limite, quand h tend vers 0, du coefficient directeur de la droite (AB), soit :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Cette pente de la courbe au point A d'abscisse x_0 est appelée « **Nombre dérivé** de f en x_0 », que l'on note : $f'(x_0)$.

A final : $$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Exemple : Soit f la fonction carré : $f : x \mapsto x^2$

On cherche $f'(3)$. D'après la définition : $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

$$\Rightarrow f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{6h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} 6 + h = 6$$

➤➤ Module 2 : Fonctions dérivées ➤➤

Consulter ce module sur Oxogone.fr

1°) Fonction dérivée d'une fonction

Soit f une fonction. On appelle fonction dérivée de la fonction f la fonction, notée f', telle que $f'(x)$ est le nombre dérivé de f en x.

2°) Fonctions dérivées des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$
$ax+b$	a
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
$\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$	$-\frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$
$\sqrt{x}$ $(x \geqslant 0)$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$

Exemple : Soit f la fonction carré : $f : x \mapsto x^2$

On cherche $f'(3)$. Avec la définition, au module précédent, nous avons trouvé : $f'(3) = 6$

Avec la formule, pour trouver $f'(3)$, il suffit de calculer l'image de 3 par la fonction dérivée de la fonction carré, c'est-à-dire : $f' : x \mapsto 2x$

On obtient : $f'(3) = 2 \times 3 = 6$

3°) Opérations sur les fonctions dérivées

❶ Si $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{Z})$ alors $f'(x) = n \times x^{n-1}$

Exemple : si $f(x) = x^4$ alors $f'(x) = 4 \times x^{4-1} = 4x^3$

❷ Soit λ un nombre réel et u une fonction.

Si $f(x) = \lambda \times u(x)$ alors $f'(x) = \lambda \times u'(x)$

Exemple : si $f(x) = 5x^4$, nous avons : $f(x) = \lambda \times u(x)$ avec $\lambda = 5$ et $u(x) = x^4$

Donc : $f'(x) = \lambda \times u'(x) = 5 \times 4x^3 = 20x^3$ car, si $u(x) = x^4$ alors $u'(x) = 4x^3$

❸ Soient u et v deux fonctions.

Si $f(x) = u(x) + v(x)$ alors $f'(x) = u'(x) + v'(x)$

Exemple : $f(x) = 6x^2 + 4x - 2$. Nous avons : $f(x) = u(x) + v(x)$ avec $u(x) = 6x^2$ et $v(x) = 4x - 2$

Donc : $u'(x) = 6 \times 2x = 12x$ et $v'(x) = 4$ (Fonction affine)

D'après la formule : $f'(x) = u'(x) + v'(x) = 12x + 4$

❹ Soient u et v deux fonctions.

Si $f(x)=u(x)\times v(x)$ alors $f'(x)=u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)$

Exemple : $f(x)=x^2\sqrt{x}$ (si $x\geqslant 0$)

Nous avons : $f(x)=u(x)\times v(x)$ avec $u(x)=x^2$ et $v(x)=\sqrt{x}$

Donc : $u'(x)=2x$ et $v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x>0)$

D'après la formule : $f'(x)=u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)$

$$=2x\times\sqrt{x}+x^2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$=\frac{5}{2}x\sqrt{x}\quad\text{(après simplification)}$$

❺ Soient u et v deux fonctions.

Si $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ alors $f'(x)=\dfrac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{[v(x)]^2}$ $(v(x)\neq 0)$

Exemple : $f(x)=\dfrac{5x-3}{4x+8}$ $(x\neq -2)$

Nous avons : $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x)=5x-3$ et $v(x)=4x+8$

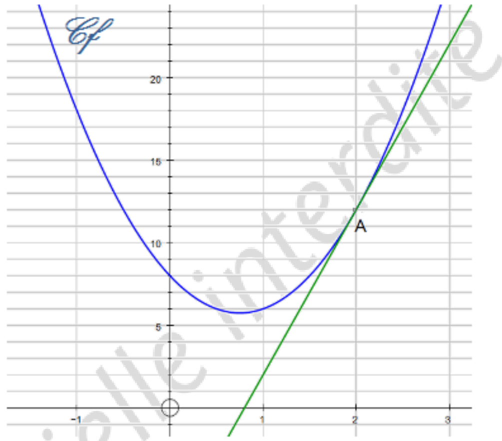
Donc : $u'(x)=5$ et $v'(x)=4$

D'après la formule : $f'(x)=\dfrac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{[v(x)]^2}=\dfrac{5(4x+8)-(5x-3)\times 4}{(4x+8)^2}=\dfrac{52}{(4x+8)^2}$ $(x\neq -2)$

➤➤ Module 3 : Tangente à une courbe représentative ◀◀

Consulter ce module sur Oxogone.fr

1°) Dérivation et tangente



Soit f une fonction . Soit C_f sa courbe représentative et soit $\mathrm{A}\left(x_0\,;\, f(x_0)\right)$ un point de C_f .

Le coefficient directeur de la tangente à C_f au point A est $f'(x_0)$.

2°) Equation réduite de la tangente

Soit f une fonction . Soit A un point de C_f ayant pour abscisse x_0 .

L'équation réduite de la tangente à C_f est : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Exemple : Soit $f : x \mapsto 6x^2$. Soit A le point de C_f d'abscisse $x_0 = 5$.

L'équation de la tangente à C_f en A est : $y = f'(5)(x-5) + f(5)$.

Or : $f(5) = 6 \times 5^2 = 150$ et $f'(5) = 12 \times 5 = 60$ car $f'(x) = 12x$.

L'équation de la tangente est alors : $y = 60(x-5) + 150$, soit, après simplification : $y = 60x - 150$.

➤➤ Module 4 : Dérivabilité d'une fonction ≺≺

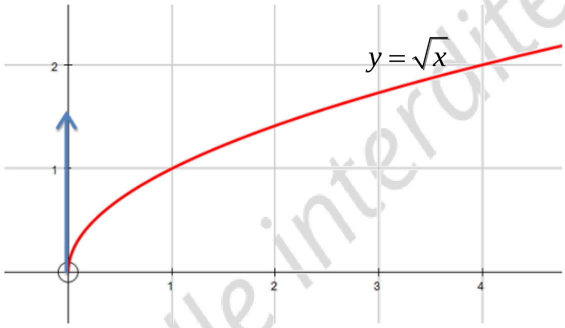
Consulter ce module sur Oxogone.fr

Soit f une fonction et soit x_0 un nombre réel. La fonction f peut-être définie en x_0 mais pas dérivable en x_0 dans les deux cas suivants :

- le nombre dérivé $f'(x_0)$ n'est pas un réel fini, c'est-à-dire que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \pm\infty$$

Dans ce cas, la courbe représentative de la fonction f admet une tangente verticale en x_0

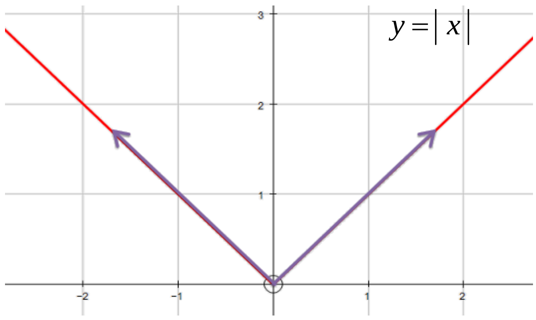


Exemple : la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0

- le nombre dérivé à gauche et à droite en x_0 n'est pas le même, c'est-à-dire que :

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \neq \lim_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Dans ce cas, la courbe représentative de la fonction f admet un point anguleux en x_0



Exemple : la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0

Remarques :

- Si la fonction f n'est pas définie en x_0 , alors elle n'est pas dérivable en x_0
- Les sommes, différences, produits et quotients de fonctions polynômes sont dérivables en tout point de leur ensemble de définition.

➢➢ Module 5 : Applications de la dérivation ≺≺

Consulter ce module sur Oxogone.fr

1°) La propriété essentielle

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Si, quel que soit le réel x de I, $f'(x) \geqslant 0$, alors la fonction f est croissante sur I.
Si, quel que soit le réel x de I, $f'(x) \leqslant 0$, alors la fonction f est décroissante sur I.

2°) Comment étudier les variations d'une fonction ?

➢ Méthode à suivre :

❶ On exprime $f'(x)$ en fonction de x.

❷ On étudie le signe de $f'(x)$.

❸ On utilise la propriété essentielle pour construire le tableau de variations de la fonction f.

Exemple : $f : x \mapsto f(x) = 5x^2 - 3x - 2$ $\qquad f'(x) = 10x - 3$

x	$-\infty$		$\frac{3}{10}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

Signe de $f'(x)$

Variations de $f(x)$

3°) Recherche d'extremums

➢ Propriété : soit f une fonction. La fonction f admet un extremum en x_0 si :

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{ET} \quad f'(x) \text{ change de signe en } x_0 .$$

Exemple : soit f la fonction carré : $f : x \mapsto x^2$

Voici son tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	0	↗	

La dérivée f' s'annule et change de signe en $x_0 = 0$.

La fonction carré admet donc un minimum en 0.

Visiter le site Oxogone.fr Cours de maths en ligne

4°) Stricte monotonie et résolution d'équations

Cette étude n'est qu'une approche d'une technique qui sera abordée plus rigoureusement en Terminale avec le Théorème des Valeurs Intermédiaires.

➢ Monotonie d'une fonction sur un intervalle :

Une fonction f est **monotone** sur un intervalle I si la dérivée f' ne change pas de signe lorsque x décrit l'intervalle I.

➢ Stricte monotonie d'une fonction sur un intervalle :

- Une fonction f est **strictement croissante** sur un intervalle I si, et seulement si, quel que soit $x \in \mathrm{I}$: $f'(x) > 0$
- Une fonction f est **strictement décroissante** sur un intervalle I si, et seulement si, quel que soit

Si une fonction est strictement croissante ou strictement décroissante sur un intervalle I, on dit qu'elle est **strictement monotone** sur l'intervalle I.

➢ Stricte monotonie et résolution d'équations :

La fonction représentée ci-dessous est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

On désire résoudre l'équation : $f(x) = 0$

On établit que $f(1) > 0$ et $f(2) < 0$. La stricte monotonie de la fonction nous permet d'affirmer qu'il existe une unique solution α de l'équation $f(x) = 0$ et que $1 < \alpha < 2$.