➤➤ Module 1 : Rappels ➤➤

Pour aborder ce chapitre, vous devez maîtriser les notions étudiées en Seconde sur le vecteurs et les équations droites.

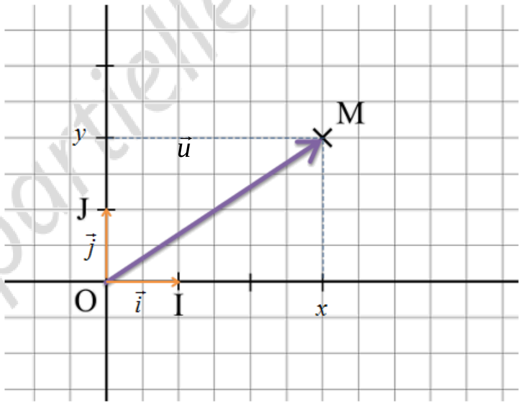
Pour les vecteurs, consultez le [résumé en PDF correspondant]

Pour les équations de droites, consultez le [résumé en PDF correspondant]

➤➤ Module 2 : Repères et bases du plan ➤➤

Consulter ce module sur Oxogone.fr

1°) Repère du plan



Soit O un point du plan et soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non nuls du plan. Soient *x* et *y* deux nombres réels.

Si M est un point du plan tel que : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ alors le point M a pour coordonnées *x* et *y* dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

De la même manière, si $\vec{u}$ est un vecteur du plan tel que : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$, alors le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées *x* et *y* dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Remarques :

- si les directions des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont perpendiculaires, on dit que le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ est orthogonal.
- Si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont colinéaires, alors $(O;\vec{i};\vec{j})$ n'est pas un repère du plan

1°) Bases du plan

Si $(O;\vec{i};\vec{j})$ est un repère du plan, alors le couple $(\vec{i}\ ;\vec{j})$ est une base du plan. Si $\vec{u}$ est un vecteur tel que : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$, alors les réels *x* et *y* sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}\ ;\ \vec{j})$.

Attention : on peut seulement repérer un vecteur dans une base. Pour repérer un point, il faut définir un repère.

Remarque : tout couple de vecteurs non colinéaires définit une base du plan

➢➢ Module 3 : Vecteurs colinéaires ≺≺

Consulter ce module sur Oxogone.fr

1°) Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. S'il existe un réel k non nul tel que : $\vec{v} = k\vec{u}$, alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tous les vecteurs du plan.

2°) Colinéarité et coordonnées

Pour établir la colinéarité de deux vecteurs du plan dont les coordonnées sont connues, on utilise la propriété suivante :

Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan :

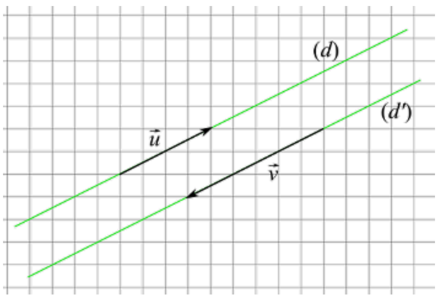
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow xy' - x'y = 0$. Le réel $xy' - x'y$ est le déterminant du couple de vecteurs $(\vec{u}\,;\vec{v})$

Exemple : soient $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan

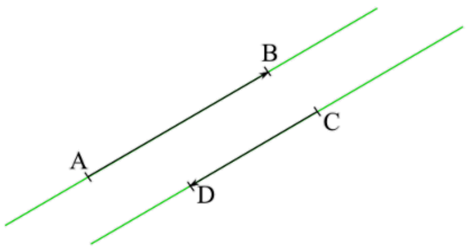
Pour établir la colinéarité des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on calcule le déterminant :
$\det(\vec{u}\,;\vec{v}) = xy' - x'y = (-2)\times(-3) - 6\times 1 = 0$
Le déterminant du couple $(\vec{u}\,;\vec{v})$ est nul, donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

3°) Colinéarité et parallélisme

➢ Propriété 1 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan de directions respectives (d) et (d')
$(d) \,/\!/\, (d') \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires



➢ Propriété 2 : Soient A, B, C et D quatre points du plan
$(AB) \,/\!/\, (CD) \Leftrightarrow$ les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires



4°) Colinéarité et alignement

➢ Propriété : Soient A, B et C trois points du plan.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ les points A, B et C sont alignés

Visiter le site Oxogone.fr Cours de maths en ligne

➤➤ Module 4 : Vecteur directeur – Equations de droites ≺≺

Consulter ce module sur Oxogone.fr

1°) Vecteur directeur d'une droite

➤ **Définition** : Soient A et B deux points et $\vec{u}$ un vecteur du plan. Le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) si, et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

➤ **Propriétés :**

- Toute droite du plan a une infinité de vecteurs directeurs.
- Soit (D) une droite du plan. Si le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (D), alors tout vecteur colinéaire à $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de la droite (D).
- Si A est un point du plan et $\vec{u}$ un vecteur non nul. Il existe une seule droite passant par A et ayant $\vec{u}$ pour vecteur directeur.

2°) Vecteur directeur et équation réduite d'une droite

➤ **Propriété** : Soit (D) une droite non verticale d'équation réduite $y = mx + p$. Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (D)

Exemple : Soit (D) la droite d'équation : $y = -3x + 4$. Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (D)

Remarque : le plan est muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. Le vecteur $\vec{j}$ est un vecteur directeur de toute droite verticale du plan.

3°) Equation cartésienne d'une droite

➤ **Méthode : comment déterminer l'équation cartésienne d'une droite ?**

Pour déterminer l'équation cartésienne d'une droite à partir des coordonnées de deux de ses points, on peut utiliser la méthode vue en Seconde : on détermine l'équation réduite ($y = mx + p$) et on transforme cette équation pour la ramener à la forme cartésienne : $ax + by + c = 0$

On peut aussi (et c'est ce qu'il vous faut savoir faire en Première) considérer la droite comme l'ensemble des points $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

Exemple : Soient $A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}-2\\8\end{pmatrix}$ deux points du plan. On veut déterminer l'équation cartésienne de la droite (AB).

Pour cela, considérons un point quelconque $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ de la droite (AB). Les points A, B et M étant alignés, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. Par conséquent, le déterminant du couple $(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB})$ est nul.

Or $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y+1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2-1\\8-(-1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\9\end{pmatrix}$ donc
$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}) &= (x-1)\times 9-(-3)\times(y+1)\\ &= 9x-9+3y+3\\ &= 9x+3y-6\end{aligned}$$

Par conséquent : $\det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB})=0 \Leftrightarrow 9x+3y-6=0 \Leftrightarrow 3x+y-2=0$

Conclusion : la droite (AB) a pour équation cartésienne : $3x+y-2=0$

➢ Remarque : Les équations $9x+3y-6=0$ et $3x+y-2=0$ sont toutes les deux des équations cartésiennes de la droite (AB). Ce qui les différencie, c'est que la première est le produit de l'autre par 3. En fait, toute droite admet une infinité d'équations cartésiennes. Si une droite (D) admet pour équation cartésienne $ax+by+c=0$ alors, quel que soit le réel k non nul, l'équation $kax+kby+kc=0$ est aussi une équation cartésienne de la droite (D).

4°) Vecteur directeur et équation cartésienne

➢ Propriété : Soit (D) une droite d'équation cartésienne : $ax+by+c=0$

Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (D)

➢ Méthode : comment déterminer l'équation cartésienne d'une droite à partir d'un point et d'un vecteur directeur ?

Il existe deux méthodes. En voici une. Soit (D) une droite passant par un point A et ayant un vecteur $\vec{u}$ pour vecteur directeur. On considère la droite comme l'ensemble des points $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Exemple : Soit $A\begin{pmatrix}2\\-7\end{pmatrix}$ un point du plan et $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ un vecteur du plan. On cherche l'équation de la droite (D) passant par A et ayant $\vec{u}$ pour vecteur directeur.

On utilise la propriété suivante : soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un point du plan.

$M\in(D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM};\vec{u})=0$

Or : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y+7\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$. Par conséquent : $\det(\overrightarrow{AM};\vec{u})=(x-2)\times 1-5\times(y+7)=x-2-5y-35=x-5y-37$

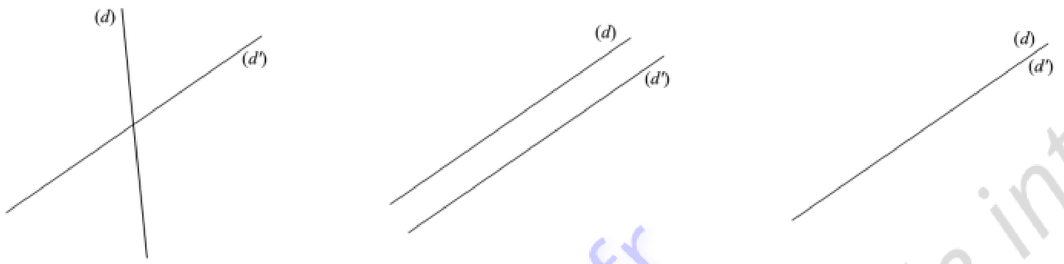
Donc : $\det(\overrightarrow{AM};\vec{u})=0 \Leftrightarrow x-5y-37=0$

Conclusion : La droite (D) a pour équation cartésienne : $x-5y-37=0$

5°) Positions relatives de deux droites du plan

Deux droites du plan peuvent être :

Sécantes — Parallèles : Strictement parallèles — Confondues



➤ Equations cartésiennes de deux droites confondues

Propriété : soit (D) la droite d'équation $ax+by+c=0$ et soit (D') la droite d'équation $a'x+b'y+c'=0$. Les droites (D) et (D') sont confondues si, et seulement si : $a'=k\,a$; $b'=k\,b$ et $c'=k\,c$ avec $k\in\mathbb{R}^*$

➤ Equations cartésiennes de deux droites strictement parallèles

Propriété : soit (D) la droite d'équation $ax+by+c=0$ et soit (D') la droite d'équation $a'x+b'y+c'=0$. Les droites (D) et (D') sont strictement parallèles si, et seulement si :

- elles ne sont pas confondues
- et $ab'-a'b=0$

➤ Equations cartésiennes de deux droites sécantes

Propriété : soit (D) la droite d'équation $ax+by+c=0$ et soit (D') la droite d'équation $a'x+b'y+c'=0$. Les droites (D) et (D') sont sécantes si, et seulement si : $ab'-a'b\neq 0$

6°) Comment trouver les coordonnées du point d'intersection de deux droites sécantes ?

Méthode : pour trouver les coordonnées du point d'intersection de deux droites sécantes, il suffit de résoudre le système d'équations formé par leurs équations cartésiennes.

Exemple : Soient (D) et (D') deux droites sécantes d'équations respectives : $4x-y-5=0$ et $-3x+5y-9=0$

Soit $\mathrm{I}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ le point d'intersection de ces deux droites. Les coordonnées de I sont les solutions du système :

$$\begin{cases}4x-y-5=0\\-3x+5y-9=0\end{cases}\text{ , soit } x=2 \text{ et } y=3\text{ . Donc } \mathrm{I}(2;3)$$