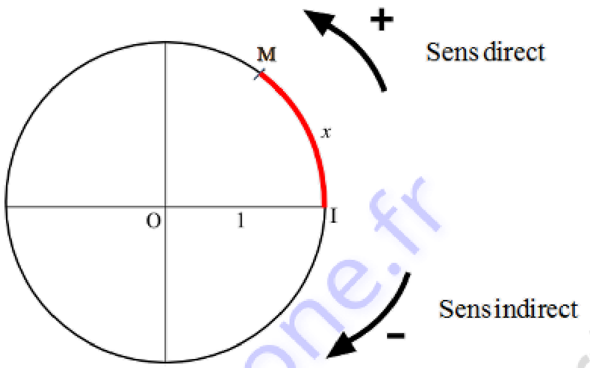
➤➤ Module 1 : Angle orienté d'un couple de vecteurs ⮜⮜

Consulter ce module sur Oxogone.fr

1°) Rappels

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}\ ; \vec{j})$. Le cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1et de centre O, affecté arbitrairement d'un sens de rotation, positif (ou direct) dans le sens antihoraire et négatif (ou indirect) dans le sens horaire.

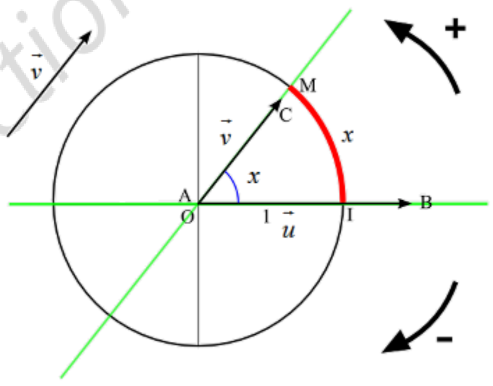


Soit M un point du cercle trigonométrique et soit x la mesure de l'arc $\overset{\frown}{IM}$. On dit que le point M est le point image du réel x sur le cercle trigonométrique. Puisque le cercle trigonométrique a pour périmètre 2π, tous les réels $x+2k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$) on aussi le point M pour point image sur le cercle trigonométrique.

Le réel x est aussi la mesure de l'angle $\widehat{IOM}$ exprimée en radians. Pour effectuer des conversions entre les degrés et les radians, on utilisera le fait que ces deux unités sont proportionnelles et que : π radians = 180°

2°) Angle orienté d'un couple de vecteurs

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. En positionnant les deux vecteurs, comme sur la figure ci-dessous, de manière à ce qu'ils aient la même origine, on obtient le résultat suivant : le réel x est la mesure de l'angle orienté du couple de vecteurs $(\vec{u}\ ; \vec{v})$



3°) Mesure principale d'un angle orienté

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. Si x est une mesure de l'angle orienté du couple $(\vec{u}\,;\vec{v})$ alors, quel que soit $k\in\mathbb{Z}$: $x+2k\pi$ est aussi une mesure de l'angle orienté du couple $(\vec{u}\,;\vec{v})$

On notera : $(\vec{u}\,;\vec{v})=x+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ ou $(\vec{u}\,;\vec{v})=x\,[2\pi]$ (cette dernière expression se lit « x modulo 2π »)

➤ Définition : la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{u}\,;\vec{v})$ est celle qui est comprise dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$

➤ Méthode : comment trouver la mesure principale d'un angle orienté ?

On cherche la mesure principale d'un angle orienté égal à $-\dfrac{23\pi}{4}$

On constate que $2\pi=\dfrac{8\pi}{4}$ (car il faut 8 fois $\dfrac{\pi}{4}$ pour faire un tour complet correspondant à 2π)

On calcule le quotient : $\dfrac{23}{8}$ et on arrondit à l'entier le plus proche. On obtient : $\dfrac{23}{8}\simeq 3$

La mesure principale cherchée est : $-\dfrac{23\pi}{4}+3\times 2\pi=\dfrac{\pi}{4}$

➤➤ Module 2 : Propriétés des angles orientés ◄◄

Consulter ce module sur Oxogone.fr

1°) Propriétés des angles orientés

➤ Propriété 1 : Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul du plan : $(\vec{u}\,;\vec{u})=0\,[2\pi]$

➤ Propriété 2 : Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul du plan : $(\vec{u}\,;-\vec{u})=\pi\,[2\pi]$

➤ Propriété 3 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan et soit k un réel non nul : $(k\vec{u}\,;k\vec{v})=(\vec{u}\,;\vec{v})\ [2\pi]$

2°) Angles orientés et colinéarité

➤ Propriété 1 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls colinéaires et de même sens : $(\vec{u}\,;\vec{v})=0\ [2\pi]$

➤ Propriété 2 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls colinéaires et de sens contraires : $(\vec{u}\,;\vec{v})=\pi\ [2\pi]$

3°) Propriétés des angles associés

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan

➤ Propriété 1 : $(\vec{v}\,;\vec{u})=-(\vec{u}\,;\vec{v})\,[2\pi]$

➤ Propriété 2 : $(\vec{u}\,;-\vec{v})=(\vec{u}\,;\vec{v})+\pi\ [2\pi]$

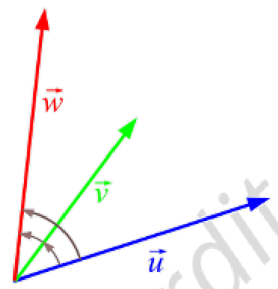
➤ Propriété 3 : $(-\vec{u}\,;\vec{v})=(\vec{u}\,;\vec{v})+\pi\ [2\pi]$

➤ Propriété 4 : $(-\vec{u}\,;-\vec{v})=(\vec{u}\,;\vec{v})\ [2\pi]$

Visiter le site Oxogone.fr Cours de maths en ligne

4°) Relation de Chasles

Soient $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls du plan : $(\vec{u};\vec{v})+(\vec{v};\vec{w})=(\vec{u};\vec{w})\ [2\pi]$



Remarque : la relation de Chasles permet de démontrer un résultat connu depuis le collège : la somme des angles d'un triangle est égale à $\pi\ [2\pi]$ radians

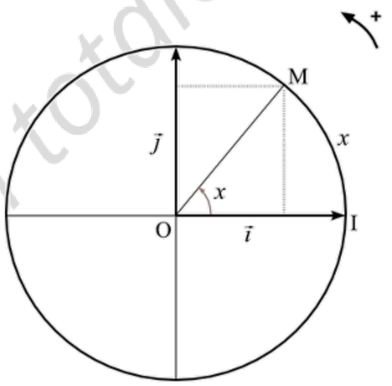
➤➤ Module 3 : Cosinus et sinus ➤➤

Consulter ce module sur Oxogone.fr

1°) Cosinus et sinus d'un nombre réel (rappels)

➤ Propriétés de base

Soit x un nombre réel et soit M le point image du réel x sur le cercle trigonométrique. Nous avons la propriété fondamentale suivante : $\mathrm{M}(\cos x\ ;\ \sin x)$



Comme, par ailleurs, x est aussi la mesure, en radians, de l'angle orienté du couple de vecteurs $\left(\overrightarrow{\mathrm{OI}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$, soit $x=\left(\overrightarrow{\mathrm{OI}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$, nous avons : $x_{\mathrm{M}}=\cos\left(\overrightarrow{\mathrm{OI}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$ et $y_{\mathrm{M}}=\sin\left(\overrightarrow{\mathrm{OI}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$

- Valeurs remarquables :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

- Propriétés vues en seconde

Quel que soit le nombre réel x :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos(x+2k\pi) = \cos x \quad \text{et} \quad \sin(x+2k\pi) = \sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x \quad \text{et} \quad \sin(-x) = -\sin x$$

2°) Formules de symétrie

Quel que soit le nombre réel x :

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \quad \text{et} \quad \sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x \quad \text{et} \quad \sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

3°) Formules d'addition

Soient a et b deux nombres réels :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

4°) Formules de duplication

Quel que soit le réel x :

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

➤➤ Module 4 : Equations et inéquations trigonométriques ≺≺

Consulter ce module sur Oxogone.fr

1°) Résolution des équations trigonométriques

➤ Equations de la forme : $\cos x = a$ $(-1 \leqslant a \leqslant 1)$ où a désigne un réel connu

Pour résoudre une équation de cette forme, il suffit de trouver un réel α (en général à l'aide des valeurs remarquables) vérifiant : $\cos \alpha = a$

Les solutions de l'équation sont les réels x tels que $x = \alpha\ [2\pi]$ ou $x = -\alpha\ [2\pi]$

Exemple : On désire résoudre l'équation : $\cos x = \frac{1}{2}$. D'après le tableau des valeurs remarquables, on constate que : $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Nous avons trouvé $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Les solutions de l'équations sont les réels x tels que : $x = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ ou $x = -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

➤ Equations de la forme : $\sin x = a$ $(-1 \leqslant a \leqslant 1)$ où a désigne un réel connu

Pour résoudre une équation de cette forme, il suffit de trouver un réel α (en général à l'aide des valeurs remarquables) vérifiant : $\sin \alpha = a$

Les solutions de l'équation sont les réels x tels que $x = \alpha\ [2\pi]$ ou $x = \pi - \alpha\ [2\pi]$

Exemple : On désire résoudre l'équation : $\sin x = \frac{1}{2}$. D'après le tableau des valeurs remarquables, on constate que : $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Nous avons trouvé $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Les solutions de l'équation sont les réels x tels que :

$x = \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ soit $x = \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ ou $x = \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$

2°) Résolution des inéquations trigonométriques

La résolution des inéquations trigonométriques est basées sur les mêmes principes que la résolution des équations. On est amené à sélectionner une portion du cercle trigonométrique et à sélectionner les abscisses des points correspondant à la portion sélectionnée.