➤➤ Module 1 : Découverte du produit scalaire ≺≺

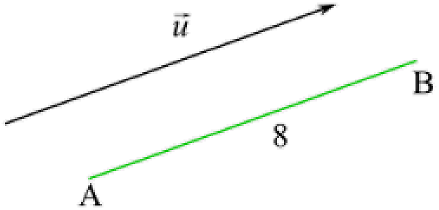
Consulter ce module sur Oxogone.fr

1°) Norme d'un vecteur

➤ **Définition** : soit $\vec{u}$ un vecteur du plan et soient A et B deux points tels que : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$

La norme du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est la distance AB

Exemple :



$\|\vec{u}\| = AB = 8$

$\|\overrightarrow{AB}\| = AB$

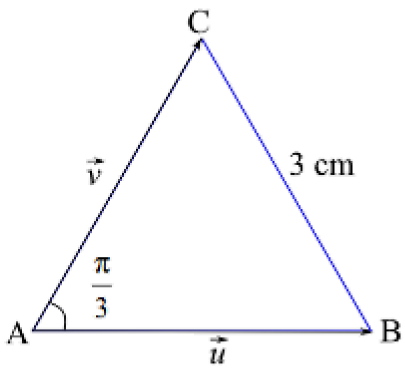
➤ **Propriétés** :

- quels que soient les points A et B du plan : $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$
- quel que soit le vecteur $\vec{u}$ du plan : $\|\vec{u}\| \geqslant 0$
- soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan muni d'un repère orthonormé. $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan et soit λ un nombre réel : $\|\lambda.\vec{u}\| = |\lambda| \times \|\vec{u}\|$

2°) Définition du produit scalaire de deux vecteurs

➤ **Définition** : soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On appelle produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u}.\vec{v}$ le nombre réel : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u};\vec{v})$

Exemple : Considérons un triangle équilatéral direct ABC dont la longueur des côtés est égale à 3



On pose : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. On désire calculer : $\vec{u}.\vec{v}$

Nous avons : $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB = 3$ et $\|\vec{v}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = AC = 3$

De plus : $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$ radians

Par conséquent : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u};\vec{v}) = 3 \times 3 \times \cos\frac{\pi}{3} = 9 \times \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$

Visiter le site Oxogone.fr Cours de maths en ligne

oxogone.fr
Reproduction totale ou partielle interdite

Copyright © 2016 • Oxogone • Tous droits réservés • Reproduction totale ou partielle interdite

➢ Colinéarité et produit scalaire

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs colinéaires du plan

- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens , alors $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraires , alors $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

3°) Produit scalaire et coordonnées

➢ Propriété : Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan muni d'un repère orthonormé. $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$

4°) Autre expression du produit scalaire

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right]$$

5°) Propriétés du produit scalaire

Soient $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan et soient α et β deux nombres réels :

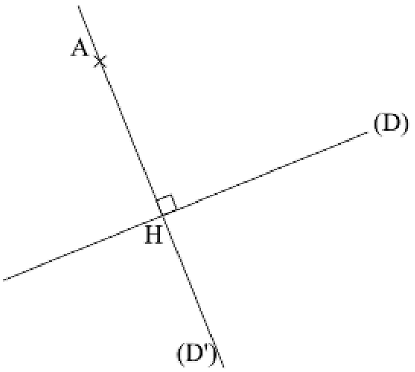
$\vec{v}.\vec{u} = \vec{u}.\vec{v}$ $\quad\quad$ $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

$(\alpha\vec{u}).(\beta\vec{v}) = \alpha\beta \times (\vec{u}.\vec{v})$

6°) Produit scalaire et projection orthogonale

➢ Notion de projection orthogonale

Sur la figure ci-contre, le point H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (D) car il est le point d'intersection de la droite (D) et de la perpendiculaire à (D) passant par A



Reproduction totale ou partielle interdite
oxogone.fr

Copyright © 2016 • Oxogone • Tous droits réservés • Reproduction totale ou partielle interdite

➢ Produit scalaire et projection orthogonale

Propriété : Soient A, B, C et D quatre points du plan et soient C' et D' les projetés orthogonaux respectivement des points C et D sur la droite (AB). Nous avons : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$ (voir fig.1)

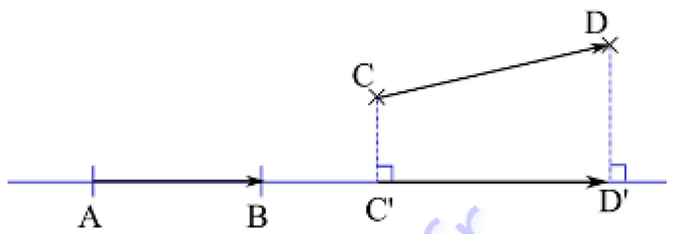


Fig.1

Corollaire 1 : La configuration étant inchangée, soit E un point quelconque de la droite (CC') et soit F un point quelconque de la droite (DD'). Nous avons : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$ (voir fig.2)

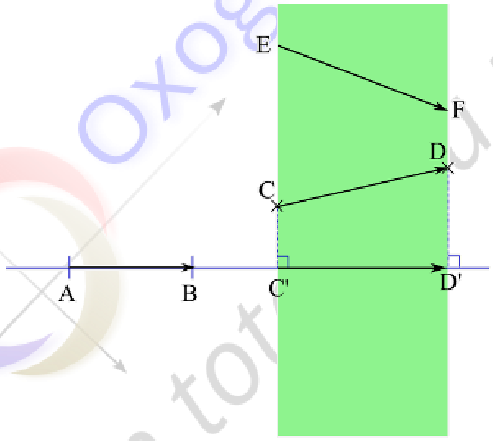


Fig.2

Corollaire 2 : La configuration étant inchangée, soit E un point quelconque de la droite (DD') et soit F un point quelconque de la droite (CC'). Nous avons : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EF}=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$ (voir fig.3)

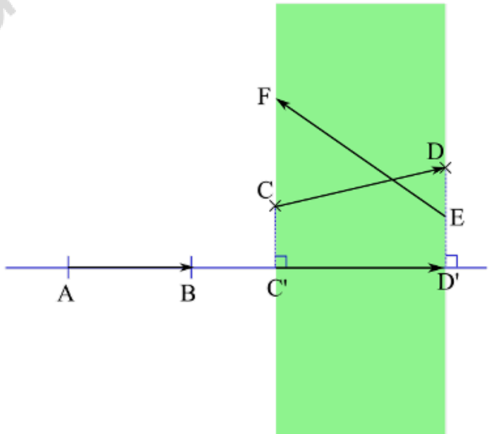


Fig.3

Copyright © 2016 • Oxogone • Tous droits réservés • Reproduction totale ou partielle interdite

Reproduction totale ou partielle interdite oxogone.fr

7°) Produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux

➢ Notion de vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs sont dits « orthogonaux » si leurs directions sont des droites perpendiculaires.

➢ Produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan muni d'un repère orthonormé.

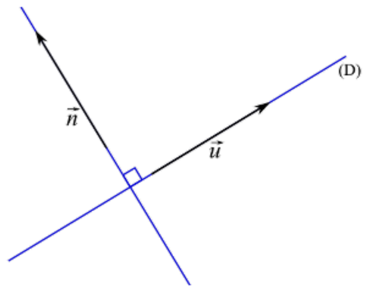
$\vec{u} \perp \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u}.\vec{v} = 0$ et comme, par ailleurs : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$, nous avons : $\vec{u} \perp \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad xx' + yy' = 0$

➢➢ Module 2 : Applications du produit scalaire ➣➣

Consulter ce module sur Oxogone.fr

1°) Produit scalaire et équations de droites

a) Vecteur normal à une droite



➢ Définition : Soit (D) un droite du plan. Un vecteur $\vec{n}$ est normal à la droite (D) si sa direction est perpendiculaire à la droite (D).

➢ Propriétés :

- Si la droite (D) a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$, alors le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est normal à (D)

- Si le vecteur $\vec{n}$ est normal à la droite (D), alors tous les vecteurs colinéaires à $\vec{n}$ sont aussi des vecteurs normaux à (D)

- Soit (D) une droite et soient $\vec{u}$ et $\vec{n}$ deux vecteurs non nuls. Si le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (D) et si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, alors le vecteur $\vec{n}$ est normal à (D)

b) Méthode : comment trouver l'équation d'une droite à partir d'un de ses points et d'un vecteur normal ?

Exemple : Quelle est l'équation de la droite (D) passant par le point $A\begin{pmatrix} -6 \\ 7 \end{pmatrix}$ et ayant pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$?

On va considérer la droite (D) comme l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux. Or $\overrightarrow{AM} \perp n \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$

Oxogone.fr
Reproduction totale ou partielle interdite

Copyright © 2016 • Oxogone • Tous droits réservés • Reproduction totale ou partielle interdite

Par ailleurs : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+6 \\ y-7 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = (x+6)\times 3 + (y-7)\times 2 = 3x+18+2y-14 = 3x+2y+4$

Donc : $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow 3x+2y+4=0$

Conclusion : la droite (D) a pour équation : $3x+2y+4=0$

Remarque : ce n'est pas la seule méthode pour trouver l'équation de la droite (D)

2°) Equations de cercles

a) Notion d'équation de cercle

Soit (C) un cercle de centre Ω et de rayon R. On peut considérer le cercle (C) comme l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ du plan tels que : $\Omega M = R$ soit $\Omega M^2 = R^2$

Or : $\Omega M^2 = (x-x_\Omega)^2 + (y-y_\Omega)^2$. Donc $\Omega M^2 = R^2 \Rightarrow (x-x_\Omega)^2 + (y-y_\Omega)^2 = R^2$

L'expression $(x-x_\Omega)^2 + (y-y_\Omega)^2 = R^2$ est l'équation du cercle (C).

Exemple : soit (C) le cercle de centre $\Omega\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et de rayon R = 4.

L'équation du cercle (C) est : $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$

b) Equation cartésienne d'un cercle

Reprenons le cercle (C) d'équation : $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$ et développons le membre de gauche. Nous obtenons : $x^2+y^2-6x-4y+13=16$, soit : $x^2+y^2-6x-4y-3=0$. Cette dernière expression est l'équation cartésienne du cercle (C).

Tout cercle a une équation cartésienne de la forme : $x^2+y^2+ax+by+c=0$

Attention : toutes les équations de la forme $x^2+y^2+ax+by+c=0$ ne sont pas des équations de cercle.

c) Equation d'un cercle de diamètre donné

Exemple : soient $A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$. On cherche l'équation du cercle (C) de diamètre $[AB]$. On sait depuis le collège que si M est un point du cercle (C) distinct de A et de B, alors le triangle ABM est rectangle en M.

On va donc définir le cercle (C) comme l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ du plan tels que $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM}$, soit tels que : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

Reproduction totale ou partielle interdite oxogone.fr

Copyright © 2016 • Oxogone • Tous droits réservés • Reproduction totale ou partielle interdite

Or $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-8 \\ y-1 \end{pmatrix}$. Par conséquent : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0 \Leftrightarrow (x-2)(x-8)+(y-3)(y-1)=0$

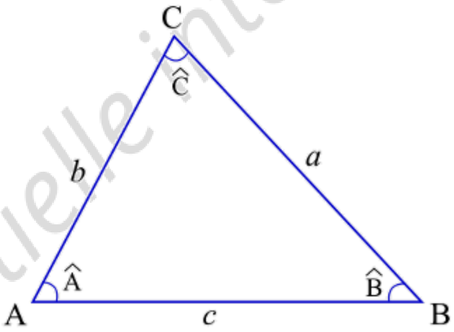
$$\Leftrightarrow x^2-10x+16+y^2-4y+3=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2-10x-4y+19=0$$

Conclusion : le cercle (C) a pour équation cartésienne : $x^2+y^2-10x-4y+19=0$

3°) Relations métriques dans le triangle

➢ Relations d'Al Kashi

Considérons un triangle ABC quelconque. Si on utilise les notations de la figure ci-contre, les relations d'Al Kashi s'énoncent ainsi :



1ère relation : $a^2=b^2+c^2-2bc\cos \mathrm{A}$

2ème relation : $b^2=a^2+c^2-2ac\cos \mathrm{B}$

3ème relation : $c^2=a^2+b^2-2ab\cos \mathrm{C}$

➢ Aire du triangle

Si on désigne par S l'aire du triangle ABC, nous avons (toujours avec les mêmes notations) :

$$\mathrm{S}=\frac{1}{2}bc\sin \mathrm{A}=\frac{1}{2}ac\sin \mathrm{B}=\frac{1}{2}ab\sin \mathrm{C}$$

➢ Théorème de la médiane

Soient A et B deux points distincts du plan et soit I le milieu du segment $[\mathrm{AB}]$

Pour tout point M du plan : $\mathrm{MA}^2+\mathrm{MB}^2=2\mathrm{MI}^2+\dfrac{\mathrm{AB}^2}{2}$

4°) Applications du plan

➢ Définition

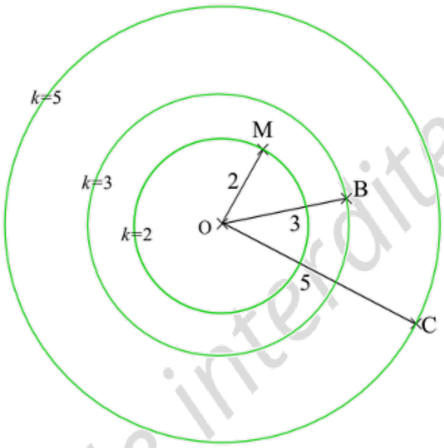
Une application du plan est une relation qui associe, à tout point M du plan, un réel

Reproduction totale ou partielle interdite
oxogone.fr

Copyright © 2016 • Oxogone • Tous droits réservés • Reproduction totale ou partielle interdite

Exemple : soit O un point du plan. On considère l'application du plan qui, à tout point M , associe la distance OM : $M \mapsto OM$

Si le point B appartient au cercle de centre O et de rayon 3, alors l'image de B par l'application est le réel 3



➤ Lignes de niveau d'une application du plan

Reprenons la même application : $M \mapsto OM$

L'ensemble des points ayant le réel 5 pour image par cette application est le cercle de centre O et de rayon 5.

De manière générale, l'ensemble des points M du plan ayant un réel k strictement positif est le cercle de centre O et de rayon k. Ces ensembles de points sont appelés lignes de niveau de l'application.

➤ Autres applications

Le produit scalaire et de théorème de la médiane permettent de définir et l'étudier les lignes de niveau d'autres applications du plan.

Exemples : $M \mapsto MA^2 + MB^2$ $\quad M \mapsto \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ (où A et B sont deux points donnés du plan)

Reproduction totale ou partielle interdite
Oxogone.fr

Copyright © 2016 • Oxogone • Tous droits réservés • Reproduction totale ou partielle interdite