➢➢ Module 1 : Pré-requis ≺≺

Consulter ce module sur Oxogone.fr

Pour réviser les acquis de Première sur les suites numériques , veuillez consulter le [résumé du chapitre correspondant]

➢➢ Module 2 : Limite d'une suite numérique ≺≺

Consulter ce module sur Oxogone.fr

1°) Limite d'une suite convergente

➢ Définition : Soit (u_n) une suite numérique et soit l un nombre réel. La suite (u_n) admet le réel l pour limite si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Cela signifie que quel que soit l'intervalle ouvert I tel que $l \in \mathrm{I}$, il existe une rang n_0 tel que : si $n > n_0$ alors $u_n \in \mathrm{I}$

On dit que la suite est convergente

Remarque : si une suite converge vers un réel *l*, alors ce réel est unique.

➢ Limites usuelles

En général, pour déterminer la limite d'une suite convergente, on utilise rarement la définition ci-dessus. On utilise plutôt les limites usuelles et les propriétés énoncées dans la suite de ce cours.

Les limites usuelles sont : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = 0$

De manière générale : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0 \quad (p \in \mathbb{N}^*)$

De plus : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

➢ Opérations sur les limites

- Propriété 1 : Limite d'une somme

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes telles que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$

La suite (w_n) définie par la relation : $w_n = u_n + v_n$ est convergente et : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l + l'$

- Propriété 2 : Limite d'une suite constante

Soit (u_n) une suite constante telle que : $u_n = k \ (k \in \mathbb{R})$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$

La suite (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = k$

[Visiter le site] Oxogone.fr Cours de maths en ligne

• Propriété 3 : Limite d'un produit

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes telles que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$

La suite (w_n) définie par la relation : $w_n = u_n \times v_n$ est convergente et : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l \times l'$

• Propriété 4 : Limite d'un quotient

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes telles que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$ $(l' \neq 0)$

Soit (w_n) la suite définie par la relation : $w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ (lorsque $v_n \neq 0$)

Si $v_n \neq 0$ au-delà d'un certain rang, la suite (w_n) est convergente et : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \dfrac{l}{l'}$

• Propriété 5 : Limites et ordre

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes telles que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$

Si, à partir d'un certain rang : $u_n < v_n$, alors : $l < l'$

➢ Le théorème des gendarmes

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes telles que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$

Soit (v_n) une suite numérique.

Si, quel que soit $n > n_0$: $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, alors la suite (v_n) est convergente et : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$

2°) Suites divergentes

a) Suite divergente de limite infinie

➢ Définition : Soit (u_n) une suite numérique et soit A un réel quelconque.

La suite (u_n) a pour limite $+\infty$ si tout intervalle ouvert $]\,A\,;+\infty\,[$ contient tous les termes de la suite au-delà d'un certain rang. C'est-à-dire que, quel que soit $A \in \mathbb{R}$, il existe un rang n_0 tel que, quel que soit $n \geqslant n_0$: $u_n > A$

La suite (u_n) a pour limite $-\infty$ si quel que soit $A \in \mathbb{R}$, il existe un rang n_0 tel que, quel que soit $n \geqslant n_0$: $u_n < A$

Si une suite admet une limite infinie, on dit qu'elle est divergente.

➢ Limites usuelles

En général, pour déterminer la limite d'une suite divergente, on utilise rarement la définition ci-dessus. On utilise plutôt les limites usuelles et les propriétés énoncées dans la suite de ce cours.

Les limites usuelles sont : $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$

De manière générale : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^p = +\infty$ De plus : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

➢ Opérations sur les limites

• Propriété 1 : Limite d'une somme

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques. La limite de la somme $u_n + v_n$ est donnée par le tableau ci-contre :

Pour lever les indéterminations, il suffira le plus souvent de transformer l'expression du terme $u_n + v_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée
$-\infty$	Forme indéterminée	$-\infty$
l	$+\infty$	$-\infty$

• Propriété 2 : Limite d'un produit

Soients (u_n) et (v_n) deux suites numériques. La limite du produit $u_n \times v_n$ est donnée par le tableau ci-contre :

Pour lever les indéterminations, il suffira le plus souvent de transformer l'expression du terme $u_n \times v_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$l = 0$	Forme indéterminée	Forme indéterminée
$l > 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l < 0$	$-\infty$	$+\infty$

• Propriété 3 : Limite de l'inverse

Soit (u_n) une suite numérique. La suite (v_n) de terme général $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ $(u_n \neq 0)$ est l'inverse de la suite (u_n)

La limite de l'inverse se déduit de celle de la suite (u_n) à l'aide du tableau suivant :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n}$
$+\infty$	0^+
$-\infty$	0^-
$l \neq 0$	$\dfrac{1}{l}$
0^+	$+\infty$
0^-	$-\infty$

• Propriété 4 : Limite du quotient

Il existe pour le quotient un tableau similaire à ceux donnés sur cette page. On pourra, pour éviter la mémorisation difficile qui en découle, utiliser l'astuce suivante :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques. Soit (w_n) la suite définie par la relation : $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ (si $v_n \neq 0$)

La limite de la suite (w_n) sera étudiée en considérant que : $w_n = u_n \times \frac{1}{v_n}$. Il suffira alors d'utiliser conjointement les propriétés 2 et 3 sur le produit et l'inverse.

➢ Théorèmes de comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques.

- s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, quel que soit $n > n_0 : v_n \geqslant u_n$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$
- s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, quel que soit $n > n_0 : v_n \leqslant u_n$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$

b) Suite divergente n'ayant pas de limite

Il existe des suites numériques qui n'ont pas de limite. On dit qu'elles sont divergentes sans limite.

Exemple : Soit (u_n) la suite définie par la relation : $u_n = (-2)^n \quad (n \in \mathbb{N})$. Cette suite est divergente sans limite.

3°) Limite d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q

- Si $u_0 > 0$:
  - $\to$ si $q > 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
  - $\to$ si $0 < q < 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0^+$
  - $\to$ si $-1 < q < 0$: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$
  - $\to$ si $q \leqslant -1 : (u_n)$ n'a pas de limite

- Si $u_0 < 0$:
  - $\to$ si $q > 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$
  - $\to$ si $0 < q < 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0^-$
  - $\to$ si $-1 < q < 0$: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$
  - $\to$ si $q \leqslant -1 : (u_n)$ n'a pas de limite

➤➤ Module 3 : Raisonnement par récurrence ≺≺

Consulter ce module sur Oxogone.fr

Pour démontrer par récurrence une propriété P_n

- Etape 1 : Initialisation

  Il s'agit de démontrer que P_0 ; P_1 ; … sont vraies

- Etape 2 : Hérédité

  Il s'agit de démontrer que, si P_n est vraie, alors P_{n+1} l'est aussi

- Etape 3 : Conclusion

  Si les deux premières étapes sont vérifiées, alors on peut conclure que P_n est vraie quel que soit n