➢➢ Module 1 : Pré-requis ≺≺

Consulter ce module sur Oxogone.fr

Pour réviser les acquis de Première sur les fonctions et les fonctions dérivées, veuillez consulter le résumé du chapitre correspondant

➢➢ Module 2 : Compléments sur les fonctions dérivées ≺≺

Consulter ce module sur Oxogone.fr

1°) Une nouvelle formule de dérivation

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et soit $n \in \mathbb{N}^*$

On note u^n la fonction définie par la relation : $u^n(x) = \left[u(x)\right]^n$

La fonction u^n est dérivable sur I et : $\left(u^n\right)' = n \times u' \times u^{n-1}$

Exemple : soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $f(x) = \left(-4x^2+5\right)^3$

Posons : $u(x) = -4x^2+5$. Nous avons : $f(x) = \left[u(x)\right]^3$

La fonction u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, quel que soit $x \in \mathbb{R}$: $u'(x) = -8x$

D'après la formule : $f'(x) = \left[\left(u(x)\right)^3\right]' = 3 \times u'(x) \times \left(u(x)\right)^2 = 3 \times (-8x) \times \left(-4x^2+5\right)^2 = -24x\left(-4x^2+5\right)^2$

2°) Composée de deux fonctions

➢ Définition : soit u une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs dans un intervalle J. Soit v une fonction définie sur l'intervalle J. On appelle composée des fonctions v et u, et on note $v \circ u$, la fonction définie sur I par la relation : $v \circ u\ (x) = v\left[u(x)\right]$

Exemple : soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $u(x) = x^2+3$. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans l'intervalle $\mathrm{J} = \left[\,3;+\infty\right[$. Soit v la fonction racine carrée. Elle est définie sur $\mathbb{R}_+$, donc sur J.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $f(x) = \sqrt{x^2+3}$. Nous avons : $f = v \circ u$ car $f(x) = v\left[u(x)\right]$

$$x \xrightarrow{u(x) = x^2+3} x^2+3 \xrightarrow{v(x) = \sqrt{x}} \sqrt{x^2+3}$$

➢ Composée et dérivation

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et à valeurs dans un intervalle J. Soit v une fonction définie et dérivable sur l'intervalle J. La fonction $v \circ u$ est dérivable sur I et : $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$

Exemple : soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $f(x)=(4x+2)^3$

Posons : $u(x)=4x+2$ et $v(x)=x^3$. Nous avons alors : $f(x)=v\circ u\ (x)$

Les fonctions u et v sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et : $u'(x)=4$ et $v'(x)=3x^2$

D'après la formule : $f'=(v\circ u)'=(v'\circ u)\times u' \Rightarrow f'(x)=v'\left[u(x)\right]\times u'(x)=v'(4x+2)\times 4=12(4x+2)^2$

➢➢ Module 3 : Fonctions et limites ≺≺

Consulter ce module sur Oxogone.fr

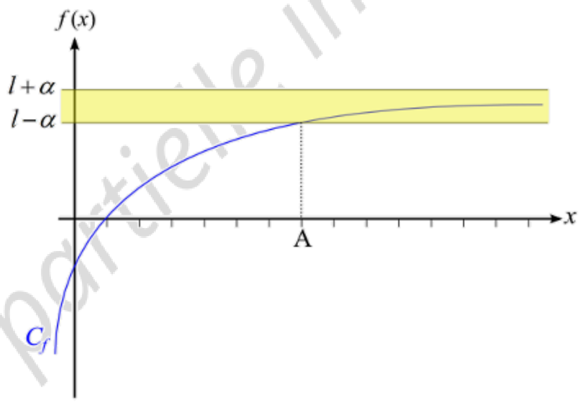
1°) Limites d'une fonction à l'infini

➢ **Limite finie en $+\infty$:**

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ et soit α un réel quelconque.

Si, pour tout $x > \mathrm{A}$: $f(x)\in \left]l-\alpha\,;\,l+\alpha\right[$,

alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$; $l\in\mathbb{R}$; $\mathrm{A}\in\mathbb{R}$

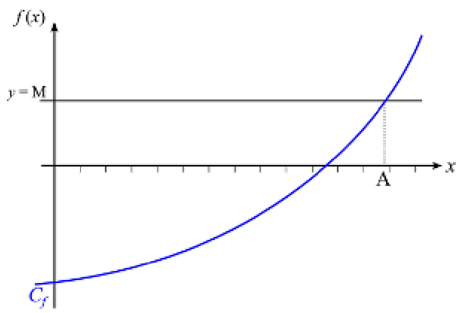


➢ **Limite infinie en $+\infty$**

- Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ et soit M un réel quelconque aussi grand que l'on veut.

  Si, pour tout $x > \mathrm{A}$ $(\mathrm{A}\in\mathbb{R})$: $f(x)\in \left]\mathrm{M}\,;+\infty\right[$, alors

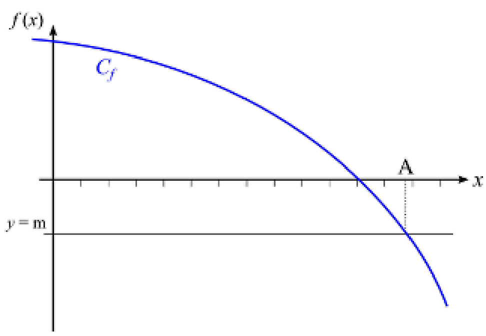
  $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$



- Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ et soit m un réel quelconque aussi petit que l'on veut.

  Si, pour tout $x > \mathrm{A}$ $(\mathrm{A}\in\mathbb{R})$: $f(x)\in \left]-\infty\,;m\right[$, alors

  $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$



Un raisonnement similaire peut-être mené lorsque x tend vers - ∞

[Visiter le site](#) Oxogone.fr Cours de maths en ligne

Limites à l'infini des fonctions de référence

- Fonction carré : $f : x \mapsto x^2 \ (x \in \mathbb{R})$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

- Fonction racine carrée : $f : x \mapsto \sqrt{x} \ (x \in \mathbb{R}^+)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et Pas de limite en $-\infty$

- Fonction cube : $f : x \mapsto x^3 \ (x \in \mathbb{R})$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

- Fonction puissance : $f : x \mapsto x^n \ (x \in \mathbb{R})$

  - Si n pair : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = \lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$
  - Si n impair : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$

- Fonction inverse : $f : x \mapsto \frac{1}{x} \ (x \in \mathbb{R}^*)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$

- Fonction valeur absolue : $f : x \mapsto |x| \ (x \in \mathbb{R})$

$\lim\limits_{x \to +\infty} |x| = \lim\limits_{x \to -\infty} |x| = +\infty$

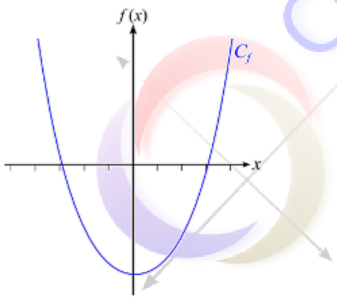
- Fonction affine : $f : x \mapsto ax + b \ (x \in \mathbb{R})$

  - si $a > 0$: $\lim\limits_{x \to +\infty} ax + b = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} ax + b = -\infty$
  - si $a < 0$: $\lim\limits_{x \to +\infty} ax + b = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} ax + b = +\infty$
  - si $a = 0$: $\lim\limits_{x \to +\infty} ax + b = \lim\limits_{x \to +\infty} b = b$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} ax + b = \lim\limits_{x \to -\infty} b = b$

Limites à l'infini des fonctions du second degré

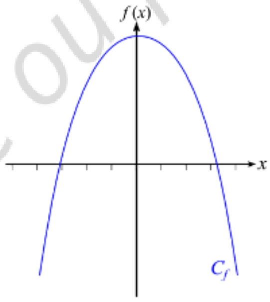
Fonction du second degré : $f : x \mapsto f(x) = ax^2 + bx + c$

Si $a > 0$:



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

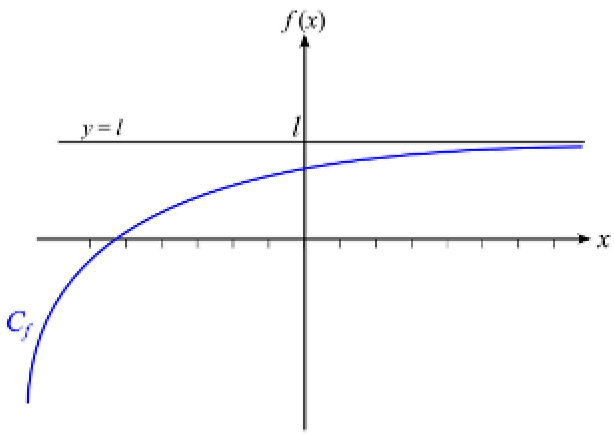
Si $a < 0$:



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Notion d'asymptote horizontale

Soit f une fonction définie au voisinage de + ∞. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$, alors la droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale à C_f en + ∞ , c'est-à-dire que, lorsque x devient grand, la courbe C_f se rapproche de cette droite sans jamais la toucher.



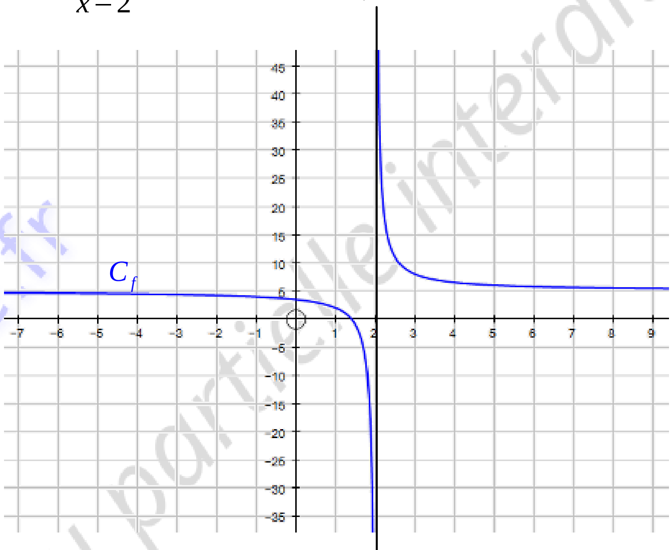
Evidemment, cette définition est vraie en - ∞ si la fonction f est définie au voisinage de -∞ et si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$

Visiter le site Oxogone.fr
Cours de maths en ligne

➢ Limite d'une fonction en un point

Lorsqu'une fonction n'est pas définie en un point donné, il peut être intéressant d'étudier le comportement de $f(x)$ lorsque x se rapproche de ce point. On obtient alors la limite de la fonction en un point. Attention, la limite à gauche du point et la limite à droite peuvent être différentes.

Exemple : Soit f la fonction définie par la relation : $f(x)=5+\dfrac{3}{x-2}$. Nous avons : $D_f=]-\infty\,;2[\cup]2\,;+\infty[$. Il est intéressant d'étudier le comportement de f lorsque x se rapproche de 2.



La courbe représentative de cette fonction (ci-contre) nous permet de conjecturer que, lorsque x se rapproche de 2 par la droite (c'est-à-dire prend des valeurs comme 2,1 ; 2,01 ; 2,001 …, l'image $f(x)$ devient infiniment grande. Nous dirons : $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$

De la même manière, on peut conjecturer que :

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$$

➢ Notion d'asymptote verticale

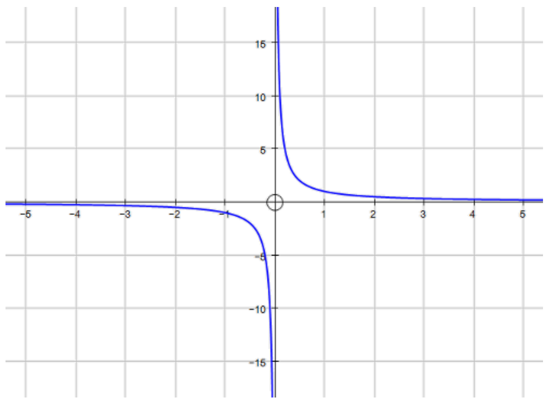
Reprenons l'exemple précédent : $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$. La droite d'équation $x=2$ est asymptote verticale à la courbe représentative de cette fonction.

➢ Des résultats très importants

Considérons la fonction inverse : $f: x\mapsto \dfrac{1}{x}$. Nous avons : $D_f=\mathbb{R}^*=]-\infty;0[\cup]0\,;+\infty[$

Les limites de cette fonction au voisinage de 0 sont à connaître par cœur : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$

L'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction inverse.



Rappel : comme nous l'avons déjà vu dans les limites à l'infini des fonctions de référence :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0^-$$

L'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction inverse.

2°) Calcul de limites avec la composition de fonctions

Exemple : Soit f la fonction définie par la relation : $f(x)=\dfrac{1}{3-x}$ $\quad D_f=\mathbb{R}-\{3\}=\left]-\infty\,;3\right[\cup\left]3\,;+\infty\right[$

On cherche les limites de cette fonction aux bornes de son ensemble de définition.

• Recherche de la limite en + ∞

Pour étudier cette limite à l'aide de la composition des fonctions, posons $u(x)=3-x$ et $v(x)=\dfrac{1}{x}$

Nous avons alors : $f(x)=v\circ u(x)$

$$x \xrightarrow{u(x)=3-x} 3-x \xrightarrow{v(x)=\frac{1}{x}} \frac{1}{3-x}$$

Nous savons que :

$\lim\limits_{x\to+\infty} 3-x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0^-$. Par conséquent : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0^-$

Remarque : de la même manière, on obtient : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0^+$

• Recherche de la limite au voisinage de 3, par exemple $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$

On utilise la même décomposition : $f(x)=v\circ u(x)$ avec $u(x)=3-x$ et $v(x)=\dfrac{1}{x}$

Nous avons : $\lim\limits_{x\to3^+} 3-x=0^-$ et $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$. Par conséquent : $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)=-\infty$

Remarque : de la même manière, on obtient : $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=+\infty$

3°) Opérations sur les limites

➢ Somme de limites

Limite de f	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Limite de g	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Limite de $f+g$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I

* F.I = Forme indéterminée

Remarque : l'indétermination sera le plus souvent levée en modifiant l'expression de $f(x)+g(x)$, par exemple en la transformant en produit à l'aide d'une factorisation.

Produit de limites

Limite de f	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
Limite de g	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Limite de $f \times g$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I

* F.I = Forme indéterminée

Remarque : l'indétermination sera le plus souvent levée en modifiant l'expression de $f(x) \times g(x)$, le plus souvent en la transformant en somme ou différence à l'aide d'un développement.

Quotient de limites

On peut établir, comme pour les sommes et les produits, un gigantesque tableau résumant tous les résultats possibles concernant les quotients de limites.

On peut aussi utiliser la méthode suivante : Si on cherche la limite d'une fonction f telle que : $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$

- on écrit $f(x) = u(x) \times \dfrac{1}{v(x)}$
- on cherche $\lim u(x)$
- on cherche $\lim v(x)$
- on utilise les limites de la fonction inverse pour déterminer $\lim \dfrac{1}{v(x)}$
- on utilise le tableau des produits de limites pour conclure

Théorèmes de comparaison

- Conservation de l'ordre

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de + ∞ et soit $A \in \mathbb{R}$

Si, quel que soit $x \geqslant A$: $f(x) \geqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Si, quel que soit $x \geqslant A$: $f(x) \leqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Ce théorème est facilement transposable en - ∞

- Théorème des gendarmes

Soient f, g et h trois fonctions définies au voisinage de + ∞ . Soient $A \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$

Si, quel que soit $x \geqslant A$: $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = l$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$

➤➤ Module 4 : Dérivées, limites et sens de variation ≺≺

Consulter ce module sur Oxogone.fr

1°) Principes essentiels pour l'étude d'une fonction

Les principes essentiels ont été abordés en classe de Première.

Rappelons les étapes essentielles de l'étude d'une fonction f :

❶ on détermine l'ensemble de définition D_f en cherchant les valeurs interdites

❷ on exprime $f'(x)$ en fonction de x et on précise l'intervalle sur lequel la fonction f est dérivable

❸ on étudie le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle sur lequel la fonction f est dérivable

❹ on utilise le théorème suivant pour dresser le tableau de variation de la fonction f :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit f' sa fonction dérivée.

- $f'(x) \geqslant 0$ quel que soit $x \in \mathrm{I}$ $\Leftrightarrow$ f est croissante sur I
- $f'(x) \leqslant 0$ quel que soit $x \in \mathrm{I}$ $\Leftrightarrow$ f est décroissante sur I
- $f'(x) = 0$ quel que soit $x \in \mathrm{I}$ $\Leftrightarrow$ f est constante sur I

❺ on enrichit le tableau de variation avec les limites de la fonction aux bornes de son ensemble de définition.

❻ on trace la courbe représentative de la fonction f

2°) Recherche des extremums de la fonction

La recherche des extremums d'une fonction s'appuie sur le théorème suivant :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit

- Si f admet un extremum en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$
- Si $f'(x_0) = 0$ et f' change de signe en x_0, alors f admet un extremum en x_0

Attention : la condition « f' change de signe en x_0 » est indispensable. Si la dérivée s'annule sans changer de signe, il n'y a pas d'extremum. Par contre, la courbe représentative admet ce qu'on appelle un « point d'inflexion ».

➤➤ Module 5 : Théorème des Valeurs Intermédiaires ➤➤

Consulter ce module sur Oxogone.fr

1°) Stricte monotonie et continuité

➤ Définition : une fonction f est monotone sur un intervalle I si sa dérivée f' ne change pas de signe lorsque x décrit l'intervalle I.

➤ Stricte monotonie d'une fonction

- Une fonction f est strictement croissante sur un intervalle I si, et seulement si , quel que soit $x \in \mathrm{I} : f'(x) > 0$
- Une fonction f est strictement décroissante sur un intervalle I si, et seulement si , quel que soit $x \in \mathrm{I} : f'(x) < 0$
- Si une fonction est strictement croissante ou strictement décroissante sur un intervalle I, on dit qu'elle est strictement monotone sur I.

Remarque : dans un tableau de variation, les flèches indiquent toujours une stricte monotonie.

➤ Continuité d'une fonction

- Une fonction f est continue sur un intervalle I si on peut tracer sa courbe représentative sur cet intervalle sans lever le crayon.

- Continuité des fonctions usuelles :
  - Les fonctions affines sont continues sur $\mathbb{R}$ (sauf certaines fonctions affines par morceaux)
  - Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$
  - Les quotients de fonctions polynômes sont continus sur leur ensemble de définition
  - La fonction racine carrée est continue sur son ensemble de définition
  - Les sommes, différences, produits et quotients de fonctions continues sur un intervalle I sont continues sur I

- Définition plus rigoureuse de la continuité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $a \in \mathrm{I}$. La fonction f est continue au point a si : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

La fonction f est continue sur l'intervalle I si elle est continue en tout point de I

➤ Continuité et dérivabilité

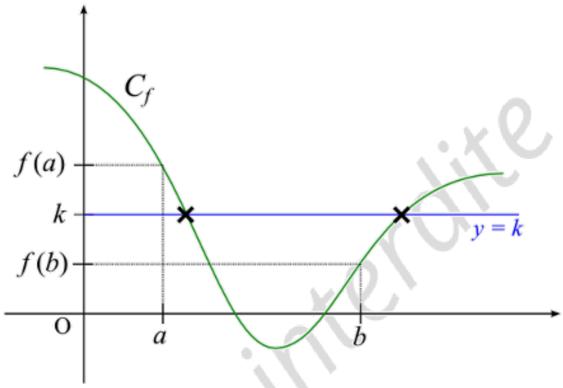
Propriété : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f est dérivable sur I, alors elle est continue sur I.

Attention : la réciproque n'est pas forcément vraie : une fonction peut-être continue et ne pas être dérivable.

Visiter le site Oxogone.fr Cours de maths en ligne

2°) Le Théorème des Valeurs Intermédiaires (version 1)

➢ Enoncé du TVI : Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I. Soient a et b deux réels de I tels que $a < b$ et soit k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. L'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]a;b[$.

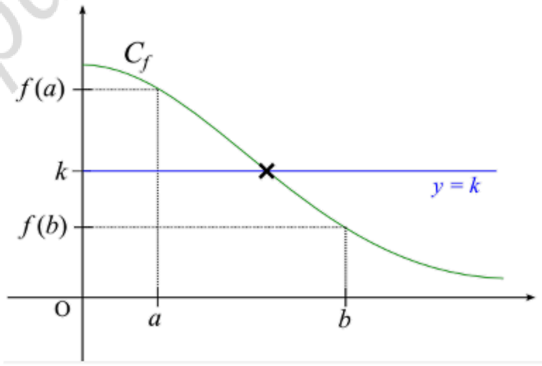


➢ Utilité du TVI : dans cette première version, le TVI permet d'établir de manière certaine l'existence d'au moins une solution pour l'équation $f(x) = k$.

➢ Conseil : il ne faut surtout pas oublier de vérifier la continuité de la fonction sur l'intervalle I

3°) Le Théorème des Valeurs Intermédiaires (version 2)

➢ Enoncé du TVI : Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Soient a et b deux réels de I tels que $a < b$ et soit k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. L'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans l'intervalle $]a;b[$.



➢ Utilité du TVI : dans cette seconde version, le TVI permet d'établir de manière certaine l'unicité de la solution pour l'équation $f(x) = k$. C'est la stricte monotonie qui permet cela.