➢➢ Module 1 : Découverte et calculs dans C ≺≺

Consulter ce module sur Oxogone.fr

1°) Découverte des nombres complexes

➢ Définitions

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$. Il contient un nombre, noté *i*, tel que $i^2 = -1$

Quel que soit le nombre complexe $z \in \mathbb{C}$, il existe deux nombres réels *x* et *y* tels que : $z = x + iy$

Le réel *x* est la partie réelle du complexe *z* : Re (*z*) = *x*

Le réel *y* est la partie imaginaire du complexe *z* : Im (*z*) = *y*

Exemple : si $z = -2 + 5i$, alors Re (*z*) = - 2 et Im (*z*) = 5

➢ Réel pur et imaginaire pur

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe

- Si Im (*z*) = 0, alors le complexe *z* est un réel pur
- Si Re (*z*) = 0, alors le complexe *z* est un imaginaire pur

➢ Egalité de deux nombres complexes

Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes. $z = z' \iff \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

2°) Somme, différence et produit dans $\mathbb{C}$

➢ Règles de calcul

Pour calculer des sommes, des différences et des produits de nombres complexes, il suffit simplement d'utiliser les techniques utilisées pour les nombres réels, en gardant à l'esprit que $i^2 = -1$. En fin de calcul, on cherche toujours à exprimer la somme, la différence ou le produit sous la forme $x + iy$

Exemple : Soient $z = 5 + 2i$ et $z' = -3 - 4i$ deux nombres complexes

$$z + z' = 5 + 2i + (-3 - 4i) = 5 + 2i - 3 - 4i = (5 - 3) + i(2 - 4) = 2 - 2i$$

$$z - z' = 5 + 2i - (-3 - 4i) = 5 + 2i + 3 + 4i = (5 + 3) + i(2 + 4) = 8 + 6i$$

$$z \times z' = (5 + 2i)(-3 - 4i) = 5 \times (-3) + 5 \times (-4i) + 2i \times (-3) + 2i \times (-4i)$$

$$= -15 - 20i - 6i - 8i^2$$

$$= -15 - 26i + 8 \qquad \text{car} \quad i^2 = -1$$

$$= -7 - 26i$$

3°) Conjugué et quotient

➢ Conjugué d'un nombre complexe

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe.

On appelle conjugué du complexe z et on note $\overline{z}$ le nombre complexe : $\overline{z} = x - iy$

Exemple : le conjugué du nombre complexe $z = -2 + 5i$ est le complexe $\overline{z} = -2 - 5i$

➢ Quotient deux nombres complexes

Pour calculer le quotient de deux nombres complexes, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Exemple : soient $z_1 = 8 - 5i$ et $z_2 = 1 + 2i$ deux nombres complexes. Nous avons :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{8-5i}{1+2i} = \frac{(8-5i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{8-16i-5i+10i^2}{1-2i+2i-4i^2} = \frac{8-21i-10}{1+4} = \frac{-2-21i}{5} = -\frac{2}{5} - \frac{21}{5}i$$

➢ Propriétés du conjugué

- Soit $z = x + iy$ un nombre complexe et soit $\overline{z}$ son conjugué.

  $z = \overline{z} \Leftrightarrow z$ est un réel pur

  $z = -\overline{z} \Leftrightarrow z$ est un imaginaire pur

  $z \times \overline{z} = x^2 + y^2$

- Soient z et $\overline{z}$ deux nombres complexes.

  $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ $\qquad$ $\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$ $\qquad$ $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

  De plus, si $z' \neq 0$: $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ et $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$

➤➤ Module 2 : Equations dans $\mathbb{C}$ ≺≺

Consulter ce module sur Oxogone.fr

Résolution des équations du second degré à coefficients réels

➤ Rappels :

Soient a, b et c trois nombres réels avec $a \neq 0$. L'équation : $ax^2+bx+c=0$ est une équation du second degré. Pour la résoudre, on calcule le discriminant $\Delta = b^2-4ac$ du trinôme ax^2+bx+c

- Si $\Delta > 0$: l'équation admet deux racines distinctes : $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$: l'équation admet une racine double : $x = \dfrac{-b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$: l'équation n'admet pas de racine

➤ Résolution dans $\mathbb{C}$

Si on résout cette équation dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire qu'on accepte que les solutions soient des nombres complexes, nous avons les résultats suivants :

- Si $\Delta > 0$: l'équation admet deux racines distinctes réelles : $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$: l'équation admet une racine double réelle : $x = \dfrac{-b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$: l'équation admet deux racines complexes conjuguées

Exemple : résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2+3z+5=0$

Nous avons $a=1$; $b=3$ et $c=5$, donc $\Delta = b^2-4ac = 3^2-4\times1\times5 = -11$

$\Delta < 0 \Rightarrow$ l'équation n'admet pas de racines réelles, mais elle admet deux racines complexes conjuguées :

$z_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

Or $\Delta = -11 = 11\times i^2 = \left(i\sqrt{11}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = i\sqrt{11}$

Par conséquent : $z_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3+i\sqrt{11}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3-i\sqrt{11}}{2}$

Module 3 : Affixe – Module - Argument

Consulter ce module sur Oxogone.fr

1°) Affixe d'un point et d'un vecteur du plan

➢ Affixe d'un point du plan

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point du plan.

On appelle affixe du point M le nombre complexe $z = x + iy$

➢ Affixe d'un vecteur du plan

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. Soit M un point du plan d'affixe $z = x + iy$. Soit $\vec{u}$ un vecteur tel que : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ (autrement dit $\vec{u}(x;\ y)$). Le complexe z est aussi l'affixe du vecteur $\vec{u}$.

➢ Propriétés

Soit M un point du plan et soit $z = x + iy$ son affixe.

z est un réel pur $\Leftrightarrow$ M appartient à l'axe des abscisses

z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow$ M appartient à l'axe des ordonnées

2°) Module d'un nombre complexe

➢ Définition

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe.

On appelle module du complexe z le nombre réel positif : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Exemple : Le module du complexe $z = -2 + 3i$ est $|z| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

➢ Propriétés

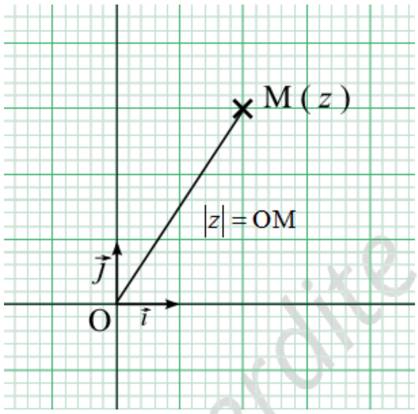
Soient z et z' deux nombres complexes et soit n un nombre réel.

$|\bar{z}| = |z|$ $\qquad |zz'| = |z| \times |z'|$ $\qquad |z^n| = |z|^n$

De plus, si $z' \neq 0$: $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ et $\left|\dfrac{1}{z'}\right| = \dfrac{1}{|z'|}$

$|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ (Inégalité triangulaire) $\qquad |z| \geqslant \mathrm{Re}(z)$ et $|z| \geqslant \mathrm{Im}(z)$

Visiter le site Oxogone.fr Cours de maths en ligne



➢ Interprétation géométrique du module d'un nombre complexe

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. Soit M un point du plan d'affixe $z = x + iy$.

$|z| = \text{OM}$

➢ Module et distance

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. Soient A et B deux points du plan, d'affixes respectives z_A et z_B. Nous avons : $|z_B - z_A| = \text{AB}$

3°) Argument d'un nombre complexe

➢ Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$. Soit M un point du plan d'affixe $z = x + iy$.

Un argument de z est une mesure, exprimée en radians, de l'angle orienté du couple de vecteurs $(\vec{i}\ ;\overrightarrow{\text{OM}})$:

$$\arg z = (\vec{i}\ ;\overrightarrow{\text{OM}})$$

Si $\arg z = \theta$, alors quel que soit $k \in \mathbb{Z}$: $\arg z = \theta + 2k\pi$

Remarque : si $\arg z = \theta$ et θ est la mesure principale de l'angle $(\vec{i}\ ;\overrightarrow{\text{OM}})$, alors on dit que θ est l'argument principal de z

➢ Propriétés

Soient z et z' deux nombre complexes non nuls.

$\arg(zz') = \arg z + \arg z'\ [2\pi]$ $\qquad$ $\arg(z^n) = n \times \arg z\ [2\pi]$

$\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'\ [2\pi]$ $\qquad$ $\arg\left(\dfrac{1}{z'}\right) = -\arg z'\ [2\pi]$

$\arg(\overline{z}) = -\arg z\ [2\pi]$

z est un réel pur $\Leftrightarrow$ $\arg(z) = 0\ [2\pi]$

z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ ou $\arg(z) = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Remarque : un nombre complexe nul n'a pas d'argument

➤➤ Module 4 : Forme trigonométrique et forme exponentielle ≺≺

Consulter ce module sur Oxogone.fr

1°) Forme trigonométrique d'un nombre complexe

➤ Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$. Soit M un point du plan d'affixe : $z = x + iy$

Posons : $|z| = \rho$ et $\arg z = \theta\ [2\pi]$ Nous avons : $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

- l'expression $x + iy$ est la forme algébrique du complexe z
- l'expression $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ est la forme trigonométrique du complexe z

➤ Propriétés : Soit $z = x + iy$ un nombre complexe de module ρ et d'argument $\theta\ [2\pi]$

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{y}{\rho}$$

➤ Comment passer de la forme trigonométrique à la forme algébrique d'un nombre complexe ?

Exemple : soit z le nombre complexe de module 8 et d'argument principal $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$

La forme trigonométrique de z est : $z = 8\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$

Comme : $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, nous avons : $z = 8\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right) = -4 + 4i\sqrt{3}$

➤ Comment passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique d'un nombre complexe ?

Exemple : soit $z = -3 + 3i$

Pour exprimer ce nombre complexe sous sa forme trigonométrique, il faut trouver son module et un de ses arguments.

❶ Calculons son module : $\rho = |z| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

❷ Trouvons un de ses arguments. Pour cela, on peut utiliser la propriété : $\cos\theta = \dfrac{x}{\rho}$ et $\sin\theta = \dfrac{y}{\rho}$

Ici, nous avons : $\cos\theta = \dfrac{-3}{3\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Après consultation du cercle trigonométrique, on obtient : $\theta = \dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$

❸ Il ne reste plus qu'à remplacer ρ et θ par les valeurs obtenues dans la forme trigonométrique :

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

2°) Forme exponentielle d'un nombre complexe

➤ Définition : soit $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ un nombre complexe.

L'expression $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ est notée $e^{i\theta}$

La forme exponentielle du complexe z est : $z = \rho e^{i\theta}$

➤ Formule de Moivre

Soit $z = e^{i\theta}$ un nombre complexe de module 1 et d'argument principal θ et soit n un entier.

$z^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{ni\theta}$ car $\left(e^x\right)^y = e^{xy}$

Par conséquent : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ (Formule de Moivre)

3°) Coordonnées polaires d'un point du plan

➤ Définition

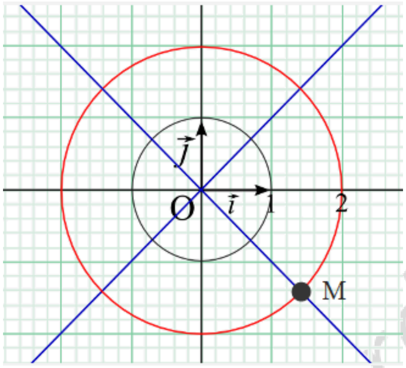
Soit $M(x;y)$ un point du plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$ et soit $z = x + iy$ son affixe.

Soit ρ le module du complexe z et soit θ un de ses arguments.

Les réels x et y sont les coordonnées cartésiennes du point M dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Les réels ρ et θ sont les coordonnées polaires du point M dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Nous avons : $x = \rho\times\cos\theta$ et $y = \rho\times\sin\theta$



Exemple : sur la figure ci-contre, nous avons :

$$OM = 2 \quad \text{et} \quad (\vec{i}\,;\overrightarrow{OM}) = -\frac{\pi}{4}\,[2\pi]$$

Par conséquent, le point M a pour coordonnées polaires :

$$2 \quad \text{et} \quad -\frac{\pi}{4}\,. \quad \text{On écrira : } \; M\left(2\,;-\frac{\pi}{4}\right)$$