➢➢ Module 1 : Probabilités conditionnelles ≺≺

Consulter ce module sur Oxogone.fr

1°) Notion de probabilités conditionnelles

➢ La formule essentielle

Soient A et B deux événements d'une même expérience aléatoire. On désigne par $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ la probabilité « de B sachant A », c'est-à-dire la probabilité que l'événement B se réalise, sachant que l'événement A est réalisé.

Nous avons alors la formule essentielle suivante : $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \dfrac{p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{p(\mathrm{A})}$

Exemple : le tableau ci-contre donne les effectifs d'un lycée de 400 élèves. Les élèves ont été répartis suivant deux critères : selon leur sexe et selon le fait qu'ils pratiquent ou non un instrument de musique.

	Garçons	Filles
Pratiquent un instrument	113	134
Ne pratiquent pas d'instrument	81	72

On choisit au hasard un élève du lycée. On désigne par G l'événement : « l'élève choisi est un garçon », par F l'événement : « l'élève choisi est un fille » et par M l'événement : « l'élève choisi pratique un instrument de musique ».

Nous cherchons la probabilité qu'un élève soit une fille, sachant que l'élève pratique un instrument de musique, soit $p_{\mathrm{M}}(\mathrm{F})$. D'après la formule les probabilités conditionnelles, nous avons : $p_{\mathrm{M}}(\mathrm{F}) = \dfrac{p(\mathrm{M} \cap \mathrm{F})}{p(\mathrm{M})}$

Or $p(\mathrm{M} \cap \mathrm{F}) = \dfrac{134}{400} = 0{,}335$ puisqu'il y a 134 filles qui pratiquent un instrument de musique sur les 400 élèves du lycée.

De plus : $p(\mathrm{M}) = \dfrac{113+134}{400} = 0{,}6175$ puisqu'il y a 113+134 élèves qui pratiquent un instrument de musique sur les 400 élèves du lycée.

Par conséquent : $p_{\mathrm{M}}(\mathrm{F}) = \dfrac{0{,}335}{0{,}6175} \simeq 0{,}5425$

La signification de cette probabilité est la suivante : si on regroupait quelque part tous les élèves qui pratiquent un instrument de musique et qu'on choisisse un élève au hasard dans ce groupe, la probabilité que l'élève choisi soit une fille serait égale à 0,5425 approximativement.

2°) Probabilités totales et indépendance

➢ Formule des probabilités totales

Soit B_1 , B_2 , … , B_n une partition d'un univers Ω.

Pour tout événement A : $p(\mathrm{A}) = p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}_1) + p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}_2) + \ldots + p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}_n)$ à condition que les parties B_1 , B_2 , … , B_n soient deux à deux disjointes.

➢ Evénements indépendants

Deux événements A et B d'une même expérience aléatoire sont indépendants si :

$$p_{A}(B) = p(B) \quad \text{ou} \quad p_{B}(A) = p(A)$$

De plus, si A et B sont deux événements indépendants d'un même expérience aléatoire, alors :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

➢➢ Module 2 : Lois continues – Loi uniforme – Loi exponentielle ➣➣

Consulter ce module sur Oxogone.fr

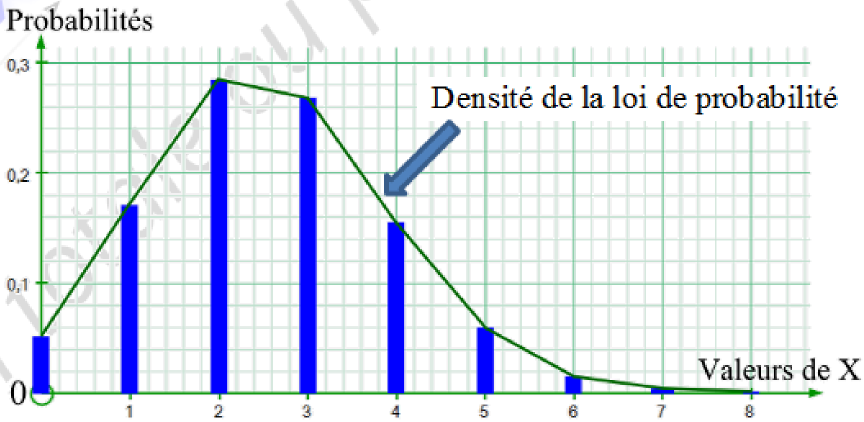
1°) Notion de densité d'une loi de probabilité

- Densité d'une loi discrète

Considérons une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 0{,}32$.

$X \sim B(8\,;\ 0{,}32)$. Le tableau ci-dessous regroupe la table des probabilités correspondante.

k	$P(X = k)$
0	0,04572
1	0,17211
2	0,28347
3	0,26680
4	0,15694
5	0,05908
6	0,01390
7	0,00187
8	0,00011



En représentant les données du tableau sous la forme d'un diagramme en bâtons (ci-dessus) et en joignant à l'aide de segments les sommets des bâtons, on obtient une ligne polygonale appelée « densité de la loi de probabilité »

On obtient une ligne brisée car les valeurs prises par une variable aléatoire suivant une loi binomiale sont en nombre fini. On ne pourrait pas calculer par exemple : $p(X = 2{,}4)$. On dit alors que la loi binomiale est une loi de probabilité discrète.

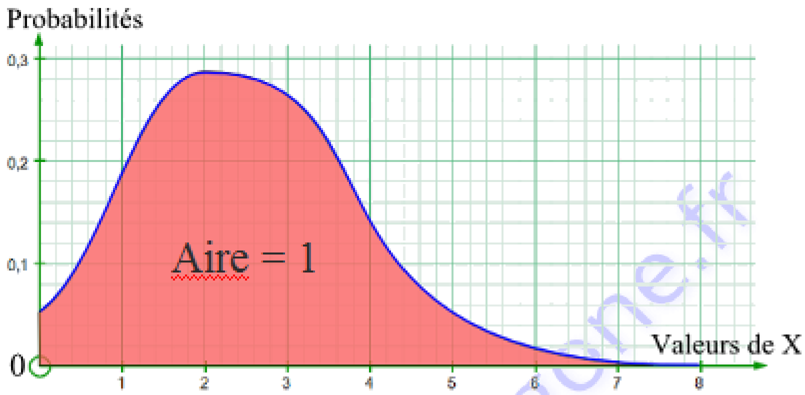
- Densité d'une loi continue

Si la variable étudiée peut prendre une infinité de valeurs dans un intervalle donné, la ligne polygonale se transforme en courbe représentative d'une fonction (voir figure page suivante). Cette fonction est appelée « densité de la loi de probabilité suivie par la variable X ». On dit alors que la variable X suit une loi de probabilité continue.

Précision de vocabulaire : dans la réalité, on ne parle de densité que dans le cadre des lois continues, qu'on appelle aussi « lois à densité »

Propriété importante : une fonction f est la densité d'une loi de probabilités sur un intervalle $I=[a;b]$ si, et seulement si elle vérifie les trois conditions suivantes :

- f est continue sur I
- f est positive sur I
- L'aire sous la courbe est égale à 1, soit : $\int_a^b f(x)\,dx = 1\ u.a$



2°) Lois à densité et calculs de probabilités

➢ La propriété essentielle :

Soit X une variable aléatoire prenant des valeurs comprises dans un intervalle I. Soit f la densité de la loi de probabilité que suit la variable X. Soient a et b deux réels de I avec $a \leqslant b$

$$p(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Exemple : dans une entreprise, un équipement est renouvelé au maximum tous les deux ans. Sa durée de vie dans l'entreprise varie aléatoirement entre 0 et 2 ans. On considère un équipement au hasard et on désigne par X la variable aléatoire qui prend comme valeurs les durées de vie possibles de cet équipement. La variable X suit une loi de probabilité continue dont la densité est la fonction f définie sur $I=[0;2]$ par la relation : $f(x)=0,25x^3$

Quelle est la probabilité que la durée de vie de l'équipement soit comprise entre 1 an et 1 an et demi ?

D'après la propriété essentielle, la probabilité cherchée est : $p(1 \leqslant X \leqslant 1,5) = \int_1^{1,5} f(x)\,dx$

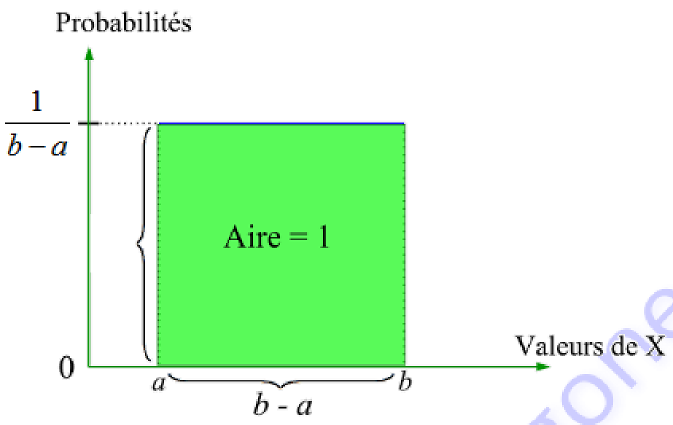
Or la fonction f est continue et une de ses primitives est la fonction F définie sur I par la relation :
$F(x) = \frac{0,25}{4}x^4 = 0,0625x^4$

Par conséquent : $p(1 \leqslant X \leqslant 1,5) = \int_1^{1,5} f(x)\,dx = F(1,5) - F(1) = 0,0625\times 1,5^4 - 0,0625\times 1^4 \simeq 0,254$

3°) Loi uniforme

➢ Définition

Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur un intervalle $\mathrm{I}=[a;b]$ (avec $a \neq b$) si, et seulement si sa densité f est définie par la relation : $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$ si $x \in [a;b]$ et $f(x)=0$ si $x \notin [a;b]$

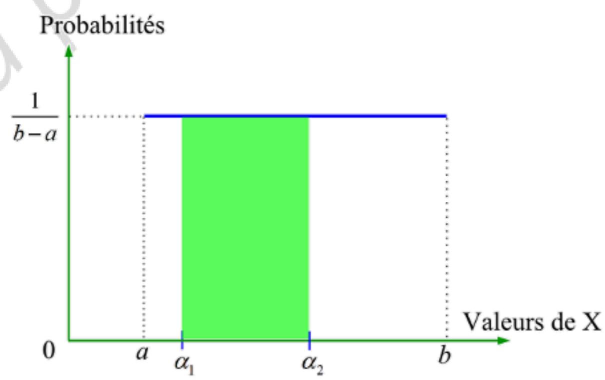


Remarque : la densité a pour courbe représentative la droite d'équation : $y=\dfrac{1}{b-a}$

➢ Calculs de probabilités et loi uniforme

Soit une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur un intervalle $\mathrm{I}=[a;b]$ (avec $a \neq b$) . Soient α_1 et α_2 deux réels de I avec $\alpha_1 < \alpha_2$. Nous avons :

$p(\alpha_1 \leqslant \mathrm{X} \leqslant \alpha_2)=\dfrac{\alpha_2-\alpha_1}{b-a}$ (c'est-à-dire l'aire du rectangle vert)



Exemple : dans la salle d'attente d'un centre médical, le temps d'attente des patients varie aléatoirement entre 1 et 5 heures. Soit X la variable aléatoire qui prend comme valeurs le temps d'attente (en heures) d'un client. La variable X suit une loi uniforme sur l'intervalle $\mathrm{I}=[1;5]$

Quelle est la probabilité qu'un client attende moins de 4 heures ?

La probabilité cherchée est : $p(1 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 4)$. D'après la formule, $p(1 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 4)=\dfrac{4-1}{5-1}=0,75$

➢ Espérance mathématique d'une variable suivant une loi uniforme

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur un intervalle $\mathrm{I}=[a;b]$ (avec $a \neq b$). L'espérance mathématique de cette variable aléatoire est : $E(\mathrm{X})=\dfrac{a+b}{2}$

4°) Loi exponentielle

➢ Définition

Soit X une variable aléatoire prenant des valeurs dans $\mathbb{R}^+$. La variable X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ si sa densité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par la relation : $f(x) = \lambda.e^{-\lambda x}$

➢ Loi exponentielle et calculs de probabilités

Pour calculer des probabilités dans le cadre d'une loi exponentielle, on utilise la propriété générale :

$p(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,dx$ soit, pour une loi exponentielle : $p(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b \lambda.e^{-\lambda x}\,dx$

A partir de cette relation, on établit facilement les formules suivantes :

- $p(a \leqslant X \leqslant b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$
- $p(X \leqslant a) = 1 - e^{-\lambda a}$
- $p(X > a) = e^{-\lambda a}$

➢ Espérance mathématique d'une variable suivant une loi exponentielle

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$

L'espérance mathématique de la variable X est : $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$

➢➢ Module 3 : Loi normale ≺≺

Consulter ce module sur Oxogone.fr

1°) Définition de la loi normale

Soit X une variable aléatoire. La variable X suit une loi normale de paramètres μ et σ^2 si sa densité est la fonction f définie par la relation : $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$. On notera : $X \sim \mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$

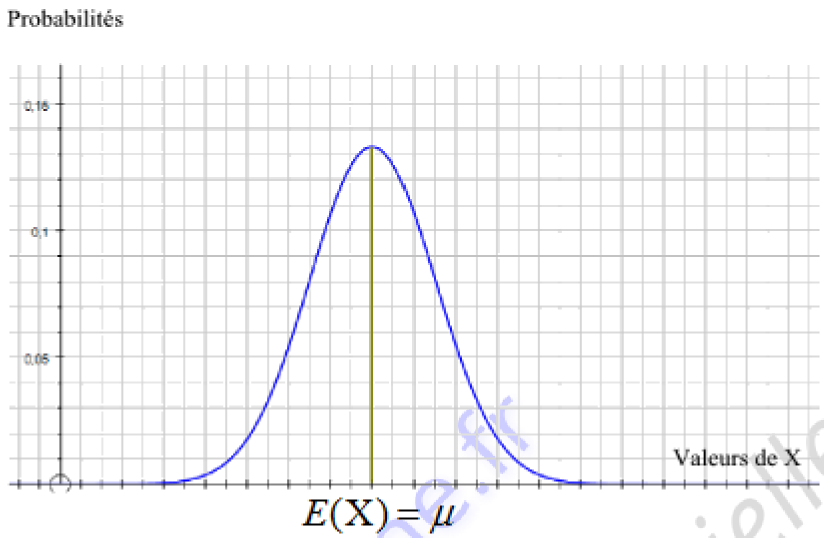
Le paramètre μ correspond à l'espérance mathématique de la variable X : $\mu = E(X)$

Le paramètre σ^2 correspond à la variance de la variable X : $\sigma^2 = V(X)$

Le paramètre σ correspond à l'écart-type de la variable X : $\sigma = \sigma(X)$

Visiter le site Oxogone.fr Cours de maths en ligne

Dans ce cas, la courbe représentative de la densité de la loi normale est une « courbe en cloche » ou « courbe de Gauss » :



2°) Calculs de probabilités avec la loi normale

Pour effectuer des calculs de probabilités avec la loi normale, on ne peut pas utiliser la formule $p(a \leqslant \mathrm{X} \leqslant b)=\int_a^b f(x)\,dx$ car il n'est pas possible d'exprimer une primitive de la densité. On peut utiliser une table de valeurs, une calculatrice ou un tableur. Dans les exemples développés dans ce résumé de cours, nous utiliserons le tableur Apache Open Office (logiciel gratuit et libre téléchargeable ici : http://www.openoffice.org/fr/)

➢ Calcul de probabilités du type : $p(\mathrm{X} \leqslant k)$

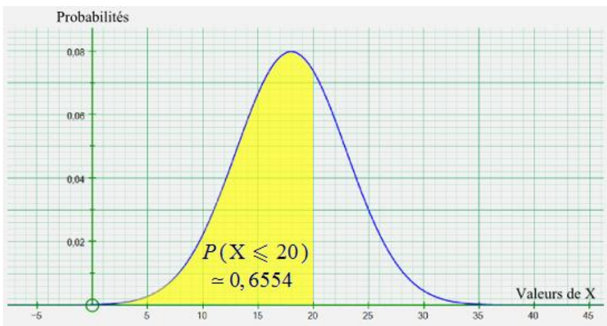
Exemple : dans un verger, on a ramassé des cerises. On choisit une cerise au hasard et on mesure son diamètre (en mm). Soit X la variable aléatoire qui prend comme valeurs les diamètres possibles de la cerise (en mm). $\mathrm{X} \sim \mathcal{N}(18\,;5^2)$. On désire déterminer la probabilité que la cerise ait un diamètre inférieur à 20 mm, soit $p(\mathrm{X} \leqslant 20)$.

Graphiquement, cela revient à déterminer, sur la figure ci-dessous, l'aire de la surface jaune. La courbe en cloche bleue est la densité de la loi normale $\mathcal{N}(18\,;5^2)$.

Pour calculer $p(\mathrm{X} \leqslant 20)$, il suffit de saisir cette commande dans une cellule du tableur.

	A	B
1	=LOI.NORMALE(20;18;5;1)	
2		

On obtient : $p(\mathrm{X} \leqslant 20) \simeq 0,6554$



➢ Calcul de probabilités du type : $p(X \geqslant k)$

On utilisera le résultat suivant : $p(X \geqslant k) = 1 - p(X \leqslant k)$

➢ Calcul de probabilités du type : $p(a \leqslant X \leqslant b)$

On utilisera le résultat suivant : $p(a \leqslant X \leqslant b) = p(X \leqslant b) - p(X \leqslant a)$

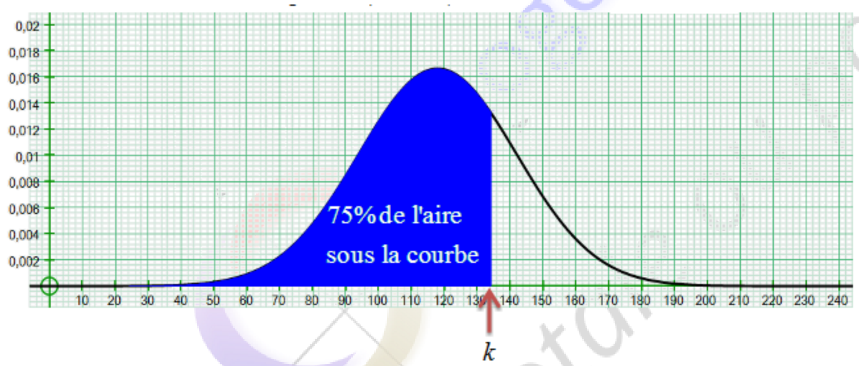
3°) Loi normale inverse

La loi normale inverse permet de calculer la valeur de k à partir d'une valeur de $p(X \leqslant k)$ ou $p(X \geqslant k)$ connue

Exemple : dans le cadre des épreuves du Bac, un professeur d'EPS fait passer à ses élèves filles l'épreuve de saut en hauteur. Soit la X la variable aléatoire qui prend comme valeurs les hauteurs possibles d'un saut. $X \sim \mathcal{N}(118\,;\,24^2)$

Quelle est la hauteur maximale atteinte par les 75% d'élèves ayant sauté le moins haut ?

Cela revient à trouver la valeur de k telle que : $p(X \leqslant k) = 0,75$



Il suffit alors de saisir cette commande dans une cellule du tableur.

	A	B	C
1	=LOI.NORMALE.INVERSE(0,75;118;24)		

On obtient $k \simeq 134,19$

4°) Propriétés de la loi normale

Soit X une variable aléatoire. $X \sim \mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$. On rappelle que $\mu = E(X)$ et que $\sigma = \sigma(X)$

➢ Propriété 1 : $p(X \geqslant \mu) = p(X \leqslant \mu) = 0,5$

➢ Propriété 2 : $p(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu - \sigma) \simeq 0,68$

➢ Propriété 3 : $p(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu - 2\sigma) \simeq 0,95$ et $p(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu - 3\sigma) \simeq 0,997$

5°) Loi normale centrée réduite

➢ La propriété essentielle :

Soit X une variable aléatoire telle que : $X \sim \mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$

Soit Y la variable aléatoire telle que : $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$

La variable Y suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;1^2)$, dont la densité est la fonction :

$$f : x \mapsto f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

➢ Exemple d'utilisation de la loi normale centrée réduite

Soit X une variable aléatoire. $X \sim \mathcal{N}(15\,;\sigma^2)$. On sait que $p(X \leqslant 17) = 0,6$. Quelle est la valeur du paramètre σ ?

Pour répondre à la cette question, on va construire une variable aléatoire $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{X-15}{\sigma}$. D'après la propriété essentielle : $Y \sim \mathcal{N}(0\,;1^2)$

Nous avons : $p(X \leqslant 17) = p\left(\dfrac{X-15}{\sigma} \leqslant \dfrac{17-15}{\sigma}\right) = p\left(Y \leqslant \dfrac{2}{\sigma}\right)$

Par conséquent : $p(X \leqslant 17) = 0,6 \Leftrightarrow p\left(Y \leqslant \dfrac{2}{\sigma}\right) = 0,6$

Trouver $\dfrac{2}{\sigma}$ revient à trouver le réel k tel que : $p(Y \leqslant k) = 0,6$ avec $Y \sim \mathcal{N}(0\,;1^2)$. C'est ce que nous avons fait précédemment lors de l'utilisation de la loi normale inverse. Il suffit de saisir cette commande dans une cellule du tableur :

	A	B	C
1	=LOI.NORMALE.INVERSE(0,6;0;1)		
2			

On obtient $k \simeq 0,2533$. Donc $\dfrac{2}{\sigma} \simeq 0,2533$ soit $\sigma \simeq 7,896$

6°) Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

➢ La propriété essentielle

Soit X une variable : $X \sim B(n\,;p)$

Si n est grand, la loi de probabilité de la variable X peut être approchée par une loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$ avec :

$$\mu = E(X) = np$$
$$\sigma = \sigma(X) = np(1-p)$$

➤➤ Module 4 : Intervalles de fluctuation ≺≺

Consulter ce module sur Oxogone.fr

1°) Rappels

En classe de seconde, nous avons établi la propriété suivante :

Dans une population donnée, un caractère apparaît dans une proportion *p*. On prélève dans cette population un échantillon de taille *n*. Il y a au moins 95% de chances que la fréquence f d'individus de l'échantillon ayant le caractère étudié soit comprise dans l'intervalle de fluctuation :

$$\mathrm{I} = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} \; ; \; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

En classe de 1ère, un travail identique a été effectué avec une loi binomiale.

Dans une population donnée, un caractère est présent dans une proportion *p*. On prélève dans cette population un échantillon de taille *n*. Soit X la variable aléatoire qui prend comme valeurs le nombre d'individus ayant le caractère étudié dans l'échantillon prélevé. Nous avons : $X \sim B\,(n\,;\,p)$.

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% est alors : $\mathrm{I} = \left[\frac{a}{n} \; ; \; \frac{b}{n} \right]$.

Le réel *a* est le plus petit entier tel que : $p(X \leqslant a) > 0{,}025$.

Le réel *b* est le plus petit entier tel que : $p(X \leqslant b) > 0{,}975$.

2°) Intervalle de fluctuation asymptotique

Dans une population donnée, un caractère est présent dans une proportion *p*. On prélève dans cette population un échantillon de taille *n*. Soit X la variable aléatoire qui prend comme valeurs le nombre d'individus ayant le caractère étudié dans l'échantillon prélevé. Nous avons : $X \sim N\,(\mu\,;\,\sigma^2)$.

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% est alors : $\mathrm{I} = \left[p - 0{,}96 \times \frac{p(1-p)}{\sqrt{n}} \; ; \; p + 0{,}96 \times \frac{p(1-p)}{\sqrt{n}} \right]$,

c'est-à-dire qu'il y a au moins 95% de chances que la fréquence d'individus de l'échantillon ayant le caractère étudié soit comprise dans cet intervalle.

Conditions de validité : le résultat obtenu à l'aide de l'intervalle de fluctuation asymptotique n'est fiable que si les 3 conditions suivantes sont vérifiées :

$n \geqslant 30$ $\qquad np \geqslant 5$ $\qquad n(1-p) \geqslant 5$