➤➤ Module 1 : Fonctions polynômes du second degré ≺≺

Consulter ce module sur Oxogone.fr

1°) Comment reconnaitre une fonction polynôme du second degré ?

➤ **Définition :** une fonction f est une fonction polynôme du second degré s'il existe trois nombres réels a, b et c tels que : $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

Exemple : Soit f la fonction définie par la relation : $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$

Cette fonction est bien une fonction polynôme du second degré car on peut écrire : $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = 3$; $b = 5$ et $c = -2$

2°) Forme canonique

➤ Forme développée et forme canonique d'une expression du second degré

Soit f une fonction polynôme du second degré définie par une relation de la forme : $f(x) = ax^2 + bx + c$

Il existe deux nombres réels α et β tels que : $ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)^2 + \beta$

La forme $ax^2 + bx + c$ est la forme développée.

La forme $a(x-\alpha)^2 + \beta$ est la forme canonique.

➤ Comment passer de la forme canonique à la forme développée ?

Exemple : Soit f la fonction polynôme du second degré définie par la relation : $f(x) = 3(x-5)^2 + 12$

On cherche la forme développée (celle de la forme : $ax^2 + bx + c$)
Pour l'obtenir, il suffit de développer la forme canonique.

Il faut d'abord constater que $(x-5)^2$ est de la forme $(a-b)^2$ avec $a = x$ et $b = 5$

On utilise alors l'identité remarquable : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

On obtient : $(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$

En remplaçant dans la forme canonique, on obtient : $f(x) = 3(x-5)^2 + 12 = 3(x^2 - 10x + 25) + 12$

Après développement et réduction, on obtient : $f(x) = 3x^2 - 30x + 87$

3°) Fonction du second degré et parabole

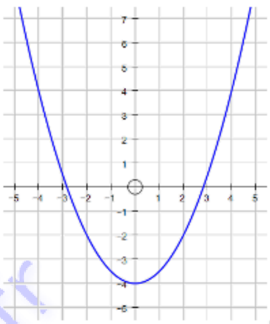
➢ Propriétés essentielles :

Soit f une fonction du second degré définie par la relation : $f(x) = ax^2 + bx + c$

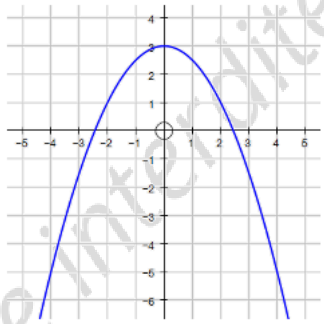
La courbe représentative de la fonction f est une parabole.

L'orientation de la parabole dépend du signe du coefficient a

Si $a > 0$, la parabole est orientée "vers le haut".

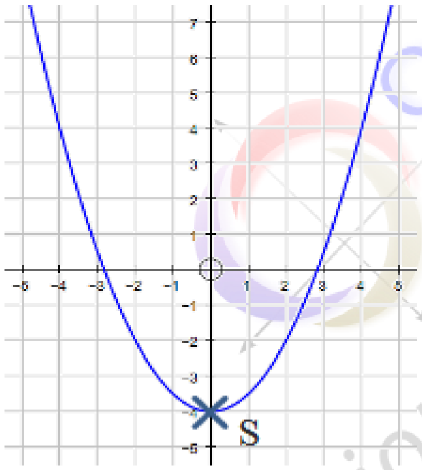


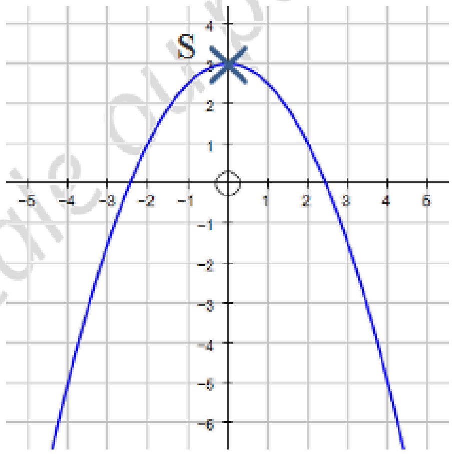
Si $a < 0$, la parabole est orientée "vers le bas".



4°) Sommet d'une parabole

➢ Sommet d'une parabole : C'est le point S représenté ci-dessous :





➢ Propriété essentielle : Soit f une fonction polynôme du second degré définie par la relation :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta \qquad \text{(forme canonique)}$$

La courbe représentative de cette fonction est une parabole de sommet $S(\alpha\,;\,\beta)$

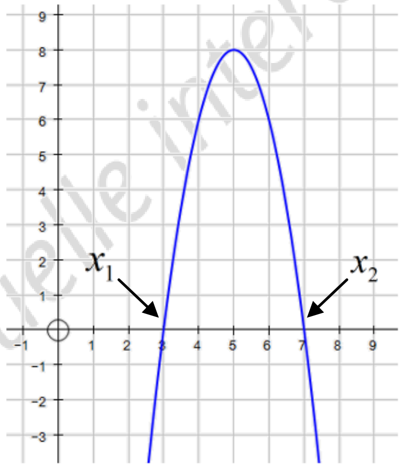
Exemple : Soit f la fonction définie par la relation : $f(x) = 3(x-5)^2 + 12$

La courbe représentative de la fonction f est une parabole de sommet $S(5\,;12)$

5°) Forme factorisée

➢ Propriété essentielle : Soit f une fonction polynôme du second degré définie par la relation : $f(x) = ax^2 + bx + c$
Soient x_1 et x_2 les solutions de l'équation : $f(x) = 0$. Nous avons : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
Cette dernière forme est la forme factorisée.

Exemple : Soit f une fonction polynôme du second degré et voici sa courbe représentative.



On voit que les solutions de l'équation $f(x) = 0$ (c'est-à-dire les abscisses des points d'intersection de la parabole et de l'axe des abscisses) sont $x_1 = 3$ et $x_2 = 7$

Supposons que le coefficient a soit égal à -2 (ça, on ne peut pas de savoir au vu de la courbe) . Nous avons :

$$f(x) = -2(x-3)(x-7)$$

6°) Recherche d'antécédents

Rechercher les antécédents d'un nombre réel par une fonction polynôme du second degré nécessite la résolution d'équation dites « du second degré ». Deux cas sont à distinguer :

- A partir de la forme développée

Si on dispose de la forme développée $f(x) = ax^2 + bx + c$, rechercher un antécédent par calcul n'est pas toujours possible avec les outils dont vous disposez en classe de 2de (ce sera chose faite en 1ère). Mais dans certains cas judicieusement choisis, il vous est possible de le faire. Reportez-vous aux exemples abordés dans le cours interactif pour plus de détails

- A partir de la forme canonique

Si on dispose de la forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, il est toujours possible de rechercher les antécédents d'un nombre réel (attention, ça ne veut pas dire qu'il y en a toujours). Pour voir la méthode en détail, reportez-vous au cours interactif.

➢➢ Module 2 : Fonctions homographiques ≺≺

Consulter ce module sur Oxogone.fr

1°) Découvrez les fonctions homographiques

➢ Définition : Une fonction f est homographique s'il existe 4 nombres réels a, b, c et d tels que :

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (\text{ avec } c \neq 0 \text{ })$$

➢ Ensemble de définition : si $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, alors

$$D_f = \left]-\infty\,;-\frac{d}{c}\right[\cup \left]-\frac{d}{c}\,;+\infty\right[\quad \text{que l'on note aussi : } \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$$

2°) Courbe représentative d'une fonction homographique

➢ Définition : Une fonction homographique a pour courbe représentative une **hyperbole**, c'est-à-dire une courbe dont l'aspect est proche de la courbe représentative de la fonction inverse (voir Fig. 1 ci-dessous)

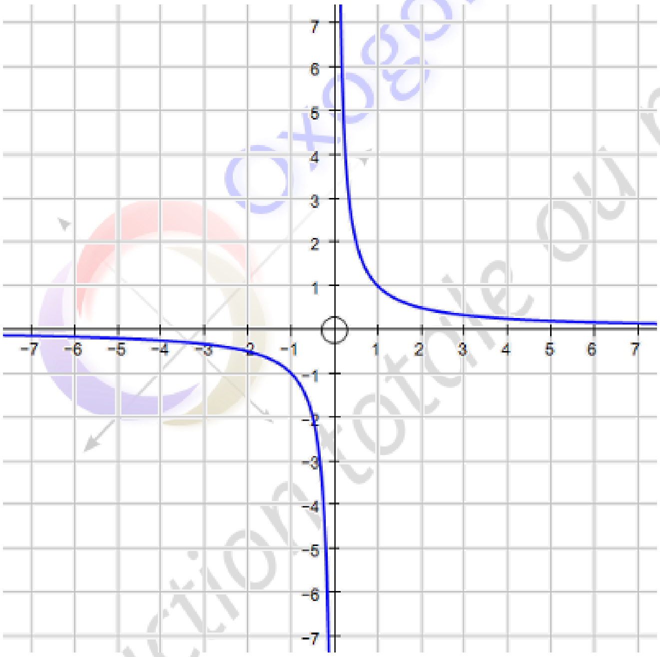


Fig. 1 : Courbe représentative de la fonction inverse

3°) Transformations d'écritures : fonctions se ramenant à une fonction homographique

Il peut arriver qu'une fonction ne se présente pas immédiatement sous sa forme homographique. Il faut alors transformer l'expression de $f(x)$ pour la ramener à la forme : $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

Exemple : Soit f la fonction définie par la relation : $f(x)=3+\dfrac{5}{2x+1}$ $\quad \left(x\neq -\dfrac{1}{2}\right)$

Pour faire apparaître la forme homographique, il faut tout mettre sous le même dénominateur en multipliant 3 par $2x+1$. On obtient : $f(x)=\dfrac{3\times(2x+1)}{2x+1}+\dfrac{5}{2x+1}=\dfrac{6x+3}{2x+1}+\dfrac{5}{2x+1}=\dfrac{6x+3+5}{2x+1}=\dfrac{6x+8}{2x+1}$

4°) Recherche d'antécédents

Rechercher les antécédents d'un nombre réel par une fonction homographique nécessite la résolution d'une équation à l'aide d'une technique nouvelle en classe de 2^{de}.

Exemple : Soit f la fonction homographique définie par la relation : $f(x)=\dfrac{2x+3}{4x-3}$ (si $x\neq\dfrac{3}{4}$)

On cherche les antécédents de 5 par f. Il faut pour cela résoudre l'équation : $\dfrac{2x+3}{4x-3}=5$

❶ On concentre tout au membre de gauche : $\dfrac{2x+3}{4x-3}=5 \Leftrightarrow \dfrac{2x+3}{4x-3}-5=0$

❷ On ramène tout le membre de gauche au même dénominateur :

$$\frac{2x+3}{4x-3}-5=0 \Leftrightarrow \frac{2x+3}{4x-3}-\frac{5\times(4x-3)}{4x-3}=0 \Leftrightarrow \frac{-18x+18}{4x-3}=0$$

❸ Un quotient est nul si son numérateur est nul : $\dfrac{-18x+18}{4x-3}=0 \Leftrightarrow -18x+18=0$

❹ On résout la dernière équation et on obtient : $x=1$