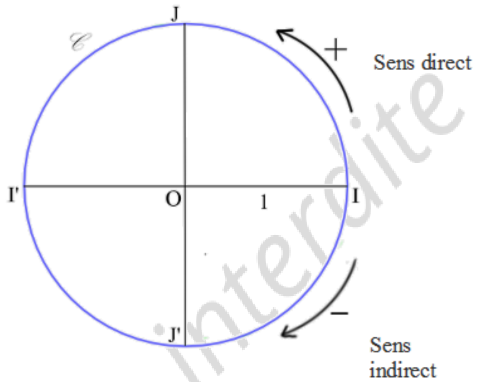
➢➢ Module 1 : Le cercle trigonométrique ≺≺

Consulter ce module sur Oxogone.fr

1°) Le cercle trigonométrique

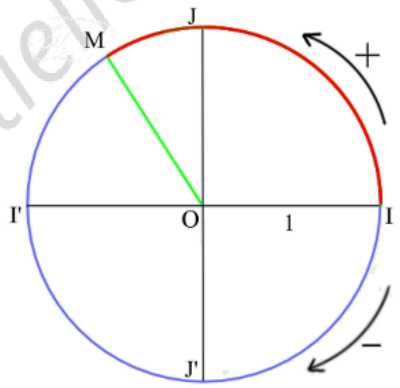
Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J). On appelle **cercle trigonométrique** un cercle de rayon 1 et de centre O. Ce cercle est muni d'un sens de rotation. Par convention, le sens positif est le sens contraire aux aiguilles d'une montre (sens anti-horaire) et le sens négatif est celui des aiguilles d'une montre (sens horaire).



2°) Point image d'un nombre réel sur le cercle trigonométrique

Plaçons un point M sur le cercle trigonométrique. Soit x la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$.

On dit que M est le **point image** du réel x sur le cercle trigonométrique.

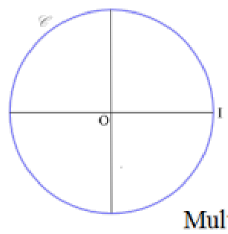


⚠ ATTENTION : comme le périmètre du cercle trigonométrique est égal à 2π , les réels auxquels on associe, en trigonométrie, des points images, sont exprimés sous forme de fractions du nombre π . Il est nécessaire de vous familiariser avec ces nouvelles expressions. Reportez-vous au cours interactif : il ne comporte pas moins de 15 applications pour vous aider.

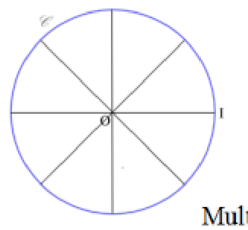
3°) Configurations de base

Les configurations de base, dont la maîtrise est indispensable en trigonométrie, sont au nombre de 4.

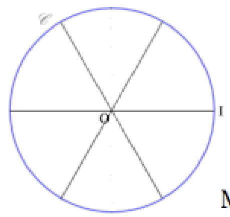
Leur étude est largement détaillée dans le cours interactif.



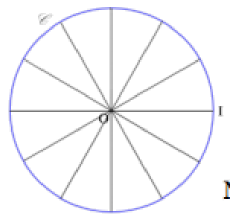
Multiples de $\frac{\pi}{2}$



Multiples de $\frac{\pi}{4}$



Multiples de $\frac{\pi}{3}$



Multiples de $\frac{\pi}{6}$

Visiter le site Oxogone.fr Cours de maths en ligne

4°) Plusieurs réels pour un seul point

A chaque fois qu'on fait un tour complet, dans un sens ou dans l'autre, sur le cercle trigonométrique, on retombe au point de départ.

Un même point du cercle trigonométrique est donc le point image d'une infinité de nombres réels.

➤ Propriété essentielle : soit M un point du cercle trigonométrique. Si M est le point image du réel x , alors il est aussi le point image de tous les réels $x+k\times 2\pi$ où k désigne un entier relatif quelconque.

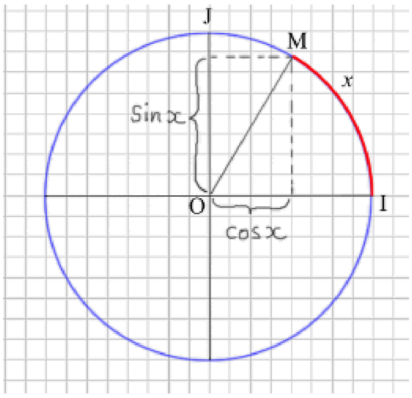
➤ Conséquence de la propriété : deux nombres réels x et x' ont le même point image sur le cercle trigonométrique s'il existe un entier relatif k tel que $x'=x+k\times 2\pi$.

➤➤ Module 2 : Cosinus et sinus d'un nombre réel ➤➤

Consulter ce module sur Oxogone.fr

1°) La propriété essentielle

Soit x un nombre réel. Soit M le point image du réel x sur le cercle trigonométrique.



L'abscisse du point M est le cosinus du réel x. L'ordonnée du point M est le sinus du réel x.

Autrement dit : M (cos x ; sin x).

Exemple : Le point J (0 ; 1) est un point du cercle trigonométrique et c'est le point image du réel $\frac{\pi}{2}$.

Nous avons alors : $\cos\frac{\pi}{2}=0$ et $\sin\frac{\pi}{2}=1$.

2°) Valeurs remarquables du cosinus et du sinus

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

3°) Variations du cosinus et du sinus d'un nombre réel

➢ La propriété essentielle :

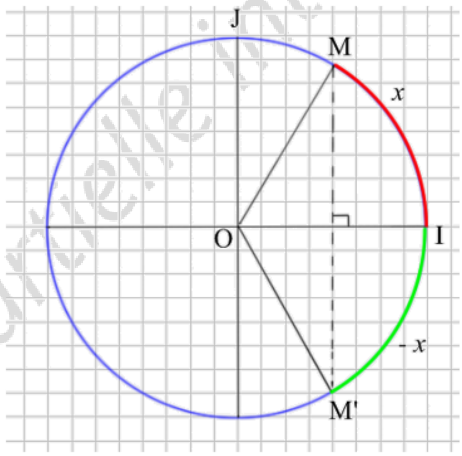
Quel que soit $x \in \mathbb{R}$: $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

Remarque : pour une étude plus fine des variations du cosinus et du sinus, veuillez vous reporter aux animations proposées dans le cours interactif.

4°) Propriétés du cosinus et du sinus d'un nombre réel

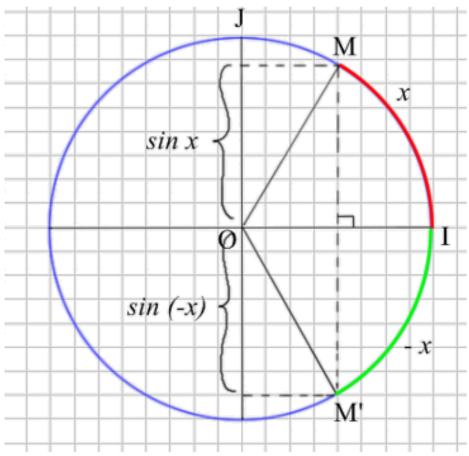
➢ Propriété 1 : Quel que soit $x \in \mathbb{R}$: $\cos(-x) = \cos x$

Cela est dû au fait que les points images de deux nombres opposés sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Ils ont donc la même abscisse.



➢ Propriété 2 : Quel que soit $x \in \mathbb{R}$: $\sin(-x) = -\sin x$

Cela est dû au fait que les points images de deux nombres opposés sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Ils ont donc des ordonnées opposées.



➢ Propriété 3 : Soit k un entier relatif et x un nombre réel.

D'après ce que nous avons vu dans le module précédent, les réels x et $x + k \times 2\pi$ ont le même point image.

Par conséquent : $\cos(x + k \times 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + k \times 2\pi) = \sin x$

5°) Relation entre le cosinus et le sinus d'un nombre réel

➤ La propriété essentielle :

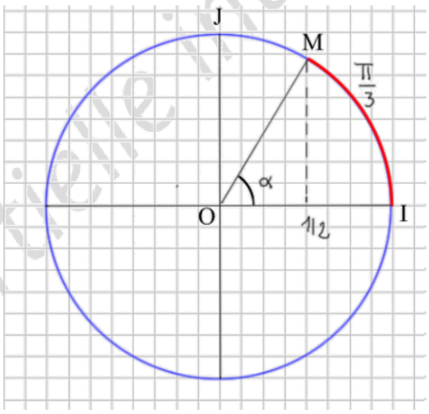
Quel que soit $x \in \mathbb{R}$: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Cette relation permet, dès lors qu'on connaît le cosinus (ou le sinus) d'un nombre réel, de trouver son sinus (ou son cosinus) en résolvant une équation. Reportez-vous au cours interactif pour voir comment faire.

Remarque : $\cos^2 x$ est la manière habituelle de noter $(\cos x)^2$

6°) Degrés et radians

➤ Introduction des radians



Soit x un nombre réel et soit M son point image sur le cercle trigonométrique.

Nous dirons que x est aussi la mesure de l'angle $\widehat{IOM}$, mais cette mesure n'est plus exprimée en degrés, mais dans une nouvelle unité d'angles : les radians.

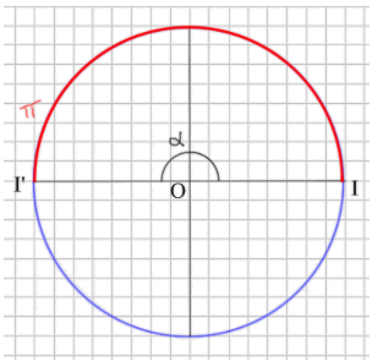
Exemple : Le point M représenté ci-contre est le point image du réel $\frac{\pi}{3}$.

Nous dirons que l'angle $\widehat{IOM}$ a pour mesure $\frac{\pi}{3}$ radians.

➤ Remarque importante :

Une mesure en radians peut être négative. Il suffit pour cela que le point image considéré soit le point image d'un réel négatif.

➤ Conversions degrés/radians et radians/degrés :



Pour effectuer des conversions entre les deux unités d'angles, on utilisera le fait que π radians $= 180°$.

En effet, sur la figure ci-contre, l'angle géométrique $\widehat{IOI'}$ est plat et a pour mesure 180°. De plus, le point I' est le point image du réel π sur le cercle trigonométrique. Par conséquent, la mesure en radians de l'angle $\widehat{IOI'}$ est π .

Exemple : la mesure d'un angle, exprimée en degrés, est égale à 45. Quelle est la mesure de cet angle en radians ?

On utilise le fait que les mesures en radians et les mesures en degrés sont proportionnelles et que π radians $= 180°$

Radians	π	?
Degrés	180	45

$? = \frac{\pi \times 45}{180} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$ La mesure de cet angle, exprimée en radians, est $\frac{\pi}{4}$

Visiter le site Oxogone.fr Cours de maths en ligne