➢➢ Module 1 : Puissances d'un nombre ≺≺

Consulter ce module sur Oxogone.fr

1°) Puissances d'un nombre - Notations

➢ Une nouvelle notation : l'expression : $2\times2\times2\times2\times2\times2$ est notée ainsi : 2^6 , c'est-à-dire « 2 puissance 6 » pour signifier que le nombre 2 est multiplié 6 fois par lui-même.

De la même manière, l'expression : $x\times x\times x\times x\times x$ sera notée ainsi : x^5

Enfin, l'expression $(-6)\times(-6)\times(-6)\times(-6)$ sera notée ainsi : $(-6)^4$

Remarque : L'expression 2^6 se lit aussi « 2 exposant 6 ». Le nombre 6 est alors l'exposant du nombre 2.

➢ Un piège à éviter : $-11^2 \neq (-11)^2$ car $-11^2 = -11\times11 = -121$ et $(-11)^2 = (-11)\times(-11) = +121$

➢ Quelques particularités à connaître :

- lorsqu'un nombre est à la puissance 2, on dit qu'il est au carré
  Exemple : 13^2 , c'est-à-dire « 13 puissance 2 », se dit « 13 au carré »
- lorsqu'un nombre est à la puissance 3, on dit qu'il est au cube
  Exemple : x^3 , c'est-à-dire « x puissance 3 », se dit « x au cube »
- quel que soit le nombre a : $a^1 = a$

2°) Calculer avec les puissances – Niveau 1

➢ La formule essentielle :

Quel que soit le nombre relatif a et quels que soient les nombres entiers n et p : $a^n \times a^p = a^{n+p}$

Exemple : $3^5 \times 3^2 = 3^{5+2} = 3^7$

3°) Calculer avec les puissances – Niveau 2

➢ La formule essentielle :

Quel que soit le nombre relatif a non nul et quels que soient les nombres entiers n et p : $\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$

Exemple : $\dfrac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$

4°) Calculer avec les puissances – Niveau 3

➢ La formule essentielle :

Quel que soit le nombre relatif a non nul et quel que soit le nombre entier n : $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

Exemple : $\frac{1}{5^4} = 5^{-4}$

➢ Cas particulier à connaître : Quel que soit le nombre relatif a : $a^0 = 1$

5°) Calculer avec les puissances – Niveau 4

➢ La formule essentielle :

Quel que soit le nombre relatif a non nul et quels que soient les nombres entiers n et p : $\left(a^n\right)^p = a^{n\times p}$

Exemple : $\left(4^2\right)^3 = 4^{2\times 3} = 4^6$

6°) Calculer avec les puissances – Niveau 5

➢ Les formules essentielles :

1ère formule : Quels que soient les nombres relatifs a et b et quel que soit l'entier n : $a^n \times b^n = (a\times b)^n$

Exemple : $3^4 \times 7^4 = (3\times 7)^4 = 21^4$

2ème formule : Quels que soient les nombres relatifs a et b (avec b non nul) et quel que soit l'entier n : $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Exemple : $\frac{8^3}{2^3} = \left(\frac{8}{2}\right)^3 = 4^3$

7°) Quelques difficultés (et pièges à éviter)

Difficulté 1 : Quel que soit le nombre relatif a et l'entier n : $-a^n \neq (-a)^n$

Exemple : $-3^4 \neq (-3)^4$ car $-3^4 = -3\times 3\times 3\times 3 = -81$ et $(-3)^4 = (-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3) = +81$

Difficulté 2 : Soit a un entier relatif quelconque, n un entier quelconque et x une variable : $ax^n \neq (ax)^n$

Exemple : $3x^2 \neq (3x)^2$

➢➢ Module 2 : L'écriture scientifique des nombres ≺≺

Consulter ce module sur Oxogone.fr

1°) L'écriture scientifique des nombres : qu'est ce que c'est ?

Dans de nombreux domaines scientifiques (physique, chimie, astronomie …), on est amené à manipuler des nombres très grands (comme 612 000 000) ou très petits (comme 0,000000542). On a donc inventé une autre façon d'écrire ces nombres extrêmes : l'écriture scientifique.

Exemple 1 : 612 000 000 sera noté : $6{,}12 \times 10^{8}$

Exemple 2 : 0,000000542 sera noté : $5{,}42 \times 10^{-7}$

2°) Comment écrire un nombre sous sa forme scientifique ?

➢ Méthode à suivre:

❶ on décale la virgule vers la gauche de manière à ne laisser qu'un seul chiffre (autre que 0) à gauche de la virgule

❷ on compte le nombre n de déplacements de la virgule qui ont été nécessaires

❸ on multiplie le nombre obtenu par :
- ☞ 10^{n} si on a décalé la virgule vers la gauche
- ☞ 10^{-n} si on a décalé la virgule vers la droite

Exemples :

- L'écriture scientifique du nombre 54200 est $5{,}42 \times 10^{4}$ car on a décalé la virgule de 4 rangs vers la gauche
- L'écriture scientifique du nombre 0,0025 est $2{,}5 \times 10^{-3}$ car on a décalé la virgule de 3 rangs vers la droite

➢➢ Module 3 : Racine carrée d'un nombre ➣➣

Consulter ce module sur Oxogone.fr

1°) Découvrez la racine carrée

➢ Définition : Soit a un nombre relatif quelconque positif. On appelle « racine carrée » du nombre a le nombre positif b tel que : $b^2 = a$. Ce nombre est noté : $\sqrt{a}$

Exemple : $\sqrt{36} = 6$ car $6^2 = 36$

➢ Deux propriétés à retenir :

- la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas
- la racine carrée est toujours un nombre positif

2°) Propriétés essentielles

➢ Propriétés à retenir :

- Soit a un nombre **positif** quelconque : $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

  Exemple : $\left(\sqrt{14}\right)^2 = 14$

- Soit a un nombre **positif** quelconque : $\sqrt{a^2} = a$

  Exemple : $\sqrt{3^2} = 3$

- Soit a un nombre **négatif** quelconque : $\sqrt{a^2} = -a$

  Exemple : $\sqrt{(-15)^2} = 15$

3°) Premières opérations avec les racines carrées

➢ Précision sur les notations : soit a un nombre positif quelconque et k un nombre quelconque.

L'expression : $k \times \sqrt{a}$ sera notée : $k\sqrt{a}$

Exemple : $3 \times \sqrt{7}$ sera noté : $3\sqrt{7}$

➢ Propriétés à retenir : soit a un nombre positif quelconque et soient k et k' deux nombres quelconques

- $k\sqrt{a} + k'\sqrt{a} = (k + k')\sqrt{a}$

  Exemple : $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = (5+3)\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

- $k\sqrt{a} - k'\sqrt{a} = (k - k')\sqrt{a}$

  Exemple : $3\sqrt{5} - 8\sqrt{5} = (3-8)\sqrt{5} = -5\sqrt{5}$

Visiter le site Oxogone.fr Cours de maths en ligne

4°) Développer avec des racines carrées

Développer des expressions comportant des racines carrées nécessite l'utilisation des propriétés étudiées dans les cours précédents.

Exemple : on désire développer l'expression : $(3+\sqrt{2})(5+\sqrt{2})$

❶ on développe normalement : $(3+\sqrt{2})(5+\sqrt{2})=3\times5+3\times\sqrt{2}+\sqrt{2}\times5+\sqrt{2}\times\sqrt{2}$

❷ on réduit l'expression en constatant que : $3\times\sqrt{2}+\sqrt{2}\times5=(3+5)\sqrt{2}=8\sqrt{2}$

On obtient : $(3+\sqrt{2})(5+\sqrt{2})=15+8\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2$

❸ on utilise la propriété : $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$ si a est positif pour établir que : $\left(\sqrt{2}\right)^2=2$

On obtient : $(3+\sqrt{2})(5+\sqrt{2})=15+8\sqrt{2}+2=17+8\sqrt{2}$

5°) Simplifier des racines carrées – Niveau 1

➢ Propriété à retenir : Soient a et b deux nombres positifs quelconques : $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$

Exemple : $\sqrt{6}\times\sqrt{4}=\sqrt{6\times4}=\sqrt{24}$

➢ Méthode à suivre pour simplifier une racine carrée : on utilise la propriété ci-dessus et celle-ci : $\sqrt{a^2}=a$

Exemple : on désire simplifier : $\sqrt{75}$

❶ on constate que : 75 = 3×25, donc : $\sqrt{75}=\sqrt{3\times25}$

❷ on constate que : 25 = 5^2, donc : $\sqrt{75}=\sqrt{3\times5^2}$

❸ on sépare à l'aide de la propriété : $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$. On obtient : $\sqrt{75}=\sqrt{3}\times\sqrt{5^2}$

❹ on utilise la propriété : $\sqrt{a^2}=a$ pour établir que : $\sqrt{5^2}=5$.

On obtient : $\sqrt{75}=\sqrt{3}\times5=5\sqrt{3}$

6°) Simplifier des racines carrées – Niveau 2

Simplifier $\sqrt{75}$ était simple. On souhaite simplifier $\sqrt{980}$. On va utiliser ce qu'on appelle la décomposition en facteurs premiers du nombre 980.

La voici : 980 = 2×2×5×7×7 (pour savoir comment l'obtenir, consultez le chapitre 5 relatif à l'arithmétique)

Par conséquent : 980 = $2^2\times5\times7^2$

Donc : $\sqrt{980}=\sqrt{2^2\times5\times7^2}=\sqrt{2^2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{7^2}=2\times\sqrt{5}\times7=14\sqrt{5}$

7°) Simplifier des racines carrées – Niveau 3

On désire maintenant simplifier l'expression : $A = 7\sqrt{27} - 5\sqrt{12} + 6\sqrt{48}$ en l'écrivant sous la forme $a\sqrt{b}$ avec b aussi petit que possible.

- Méthode à suivre : on va simplifier $\sqrt{27}$, $\sqrt{12}$ et $\sqrt{48}$ à l'aide des techniques étudiées précédemment.

Exemple : simplifions l'expression : $A = 7\sqrt{27} - 5\sqrt{12} + 6\sqrt{48}$

Nous avons : $\sqrt{27} = \sqrt{9\times 3} = \sqrt{3^2 \times 3} = \sqrt{3^2}\times\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

$\sqrt{12} = \sqrt{3\times 4} = \sqrt{3\times 2^2} = \sqrt{3}\times\sqrt{2^2} = \sqrt{3}\times 2 = 2\sqrt{3}$

$\sqrt{48} = \sqrt{3\times 16} = \sqrt{3\times 4^2} = \sqrt{3}\times\sqrt{4^2} = \sqrt{3}\times 4 = 4\sqrt{3}$

Par conséquent :
$$\begin{aligned} A &= 7\times 3\sqrt{3} - 5\times 2\sqrt{3} + 6\times 4\sqrt{3} \\ &= 21\sqrt{3} - 10\sqrt{3} + 24\sqrt{3} \\ &= 35\sqrt{3} \end{aligned}$$

8°) Simplifier des racines carrées – Niveau 4

- Propriété à retenir : soient a et b deux nombres positifs quelconques avec $b \neq 0$: $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

Exemple : $\sqrt{\dfrac{49}{9}} = \dfrac{\sqrt{49}}{\sqrt{9}}$

- Comment utiliser la formule pour simplifier un calcul ?

Exemple 1 : $\dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{27}} = \sqrt{\dfrac{48}{27}} = \sqrt{\dfrac{3\times 16}{3\times 9}} = \dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = \dfrac{\sqrt{4^2}}{\sqrt{3^2}} = \dfrac{4}{3}$

Exemple 2 : $\dfrac{\sqrt{20}\times\sqrt{6}}{\sqrt{30}} = \dfrac{\sqrt{20\times 6}}{\sqrt{30}} = \dfrac{\sqrt{120}}{\sqrt{30}} = \sqrt{\dfrac{120}{30}} = \sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$