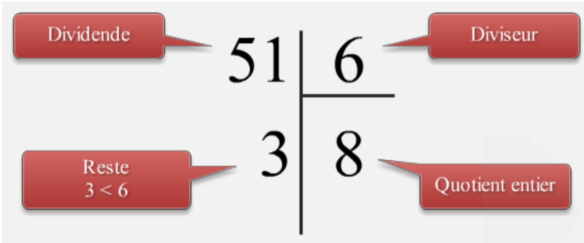
➤➤ Module 1 : Division euclidienne ≺≺

Consulter ce module sur Oxogone.fr

1°) Rappels de vocabulaire

On pose l'opération : $51 \div 6$

Voici le vocabulaire à maîtriser :



2°) La division euclidienne

➤ Définition : Soient *a* et *b* deux nombres entiers positifs quelconques (avec $b \neq 0$)

Effectuer la division euclidienne de *a* par *b* revient à trouver deux nombres entiers positifs *q* et *r* tels que :

$$a = b \times q + r \quad \text{et} \quad r < b$$

Le nombre *a* est le dividende, le nombre *b* le diviseur, le nombre *q* le quotient et le nombre *r* le reste

Exemple : Posons la division : $51 \div 6$. On obtient ceci

Nous avons alors : $51 = 6 \times 8 + 3$ et $3 < 6$

➤➤ Module 2 : Divisibilité et nombres premiers ≺≺

Consulter ce module sur Oxogone.fr

1°) Divisibilité - Multiples

⇨ Divisibilité – Diviseurs d'un nombre entier

➤ Définition : Soient *a* et *b* deux nombres entiers positifs quelconques (avec $b \neq 0$)
On dit que *b* est un **diviseur** de *a* , ou que *a* est **divisible** par *b* lorsqu'il existe un nombre entier positif *n* tel que :

$$a = b \times n$$

Conséquence de la définition : si *b* est un diviseur de *a*, alors le reste de la division euclidienne de *a* par *b* est 0

Exemple 1 : 6 est un diviseur de 24 car 24 = 6×4

Exemple 2 : 6 n'est pas un diviseur de 25 car il n'est pas possible de trouver un entier *n* tel que : 25 = 6×*n*

➢ Critères de divisibilité : il est facile de déterminer si un nombre est divisible par 2, 3 , 5 ou 9. Les critères de divisibilité par ces nombres ont été étudiés dans le Chapitre 1. Rappelons- les :

- divisibilité par 2 : un nombre est divisible par 2 s'il se termine par 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8
- divisibilité par 3 : un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est elle-même divisible par 3
- divisibilité par 5 : un nombre est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5
- divisibilité par 9 : un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est elle-même divisible par 9

⇨ Multiples d'un nombre entier

➢ Définition : si *b* est un diviseur de *a*, alors *a* est un **multiple** de *b*.

Exemple : 765 est divisible par 9. Nous dirons que 765 est un multiple de 9.

2°) Les nombres premiers

➢ Définition : un nombre est dit « premier » s'il n'a que deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exemple 1 : Le nombre 11 est un nombre premier car il n'a que deux diviseurs : 1 et 11.

Exemple 2 : Le nombre 15 n'est pas un nombre premier car il a d'autres diviseurs que 1 et lui-même : 3 et 5.

Attention : le nombre 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur.

Pour rappel, le début de la liste des nombres premiers : 2 – 3 – 5 – 7 – 11 – 13 – 17 – 19 …….

➢➢ Module 3 : PGCD ➢➢

Consulter ce module sur Oxogone.fr

1°) Découvrez le PGCD de deux nombres

➢ Définition : Le PGCD (Plus Grand Commun Diviseur) de deux nombres entiers, c'est le plus grand des diviseurs que ces deux nombres ont en commun.

Exemple : Prenons par exemple les nombres 24 et 30
Le nombre 24 a pour diviseurs : 1 – 2 – 3 – 4 – 6 – 8 – 12 – 24
Le nombre 30 a pour diviseurs : 1 – 2 – 3 – 5 – 6 – 10 – 15 – 30
Les diviseurs qu'ils ont en commun sont : 1 – 2 – 3 – 6
Le plus grand de ces diviseurs communs est 6 : c'est leur PGCD. On écrira : PGCD (24 ; 30) = 6

➢ Méthode à suivre pour déterminer le PGCD de deux nombres.

Il en existe deux : la méthode des soustractions successives et la méthode d'Euclide

2°) La méthode des soustractions successives

➤ Propriété utilisée : Soient a et b deux nombres entiers positifs tels que : $a > b$:

PGCD (a ; b) = PGCD (b ; $a - b$)

➤ Méthode à suivre : on utilise la propriété jusqu'à obtenir le PGCD de deux nombres égaux. Ce PGCD est celui cherché.

Exemple : on cherche le PGCD des nombres 117 et 91

D'après la propriété : PGCD (117 ; 91) = PGCD (91 ; 117-91) = PGCD (91 ; 26)

On utilise à nouveau la propriété : PGCD (91 ; 26) = PGCD (26 ; 91- 26) = PGCD (26 ; 65)

On recommence en mettant le plus grand nombre en premier :

PGCD (65 ; 26) = PGCD (26 ; 65 – 26)= PGCD (26 ; 39)

Et encore une fois : PGCD (39 ; 26) = PGCD (26 ; 39 – 26) = PGCD (26 ; 13)

Et une dernière fois : PGCD (26 ; 13) = PGCD (13 ; 26 – 13) = PGCD (13 ; 13)

Nous avons obtenu deux nombres égaux. Conclusion : PGCD (117 ; 9) =13

3°) La méthode d'Euclide (ou algorithme d'Euclide)

➤ Propriété utilisée : Soient a et b deux nombres entiers positifs tels que : $a > b$:

PGCD (a ; b) = PGCD (b ; r) où r désigne le reste de la division euclidienne de a par b

➤ Méthode à suivre : on utilise la propriété autant de fois que nécessaire jusqu'à obtenir un reste nul. Le PGCD cherché est le dernier reste non nul obtenu.

Exemple : on cherche le PGCD des nombres 117 et 91

Il faut effectuer la division euclidienne de 117 par 91. On obtient : 117 = 91×1 + 26.

Donc $r = 26$

Utilisons la propriété : PGCD (117 ; 91) = PGCD (91 ; 26)

Et on recommence en effectuant la division euclidienne de 91 par 26. On obtient : 91 = 26 × 3 + 13.

Donc $r = 13$

Utilisons la propriété : PGCD (91 ; 26) = PGCD (26 ; 13)

On effectue la division euclidienne de 26 par 13. On obtient : 26 = 13 × 2 + 0.

Le reste est nul. L'algorithme est terminé. Le PGCD cherché est le dernier reste non nul, soit 13.

➢➢ Module 4 : Simplifications de fractions ≺≺

Consulter ce module sur Oxogone.fr

1°) Notion de fraction irréductible

La notion de fraction irréductible repose sur la notion de nombres premiers entre eux.

➢ Définition : Deux nombres entiers positifs sont dits « **premiers entre eux** » si leur PGCD est égal à 1.

➢ Définition : Une fraction est **irréductible** si son numérateur et son dénominateur sont des nombres premiers entre eux. Une fraction irréductible ne peut pas être simplifiée.

Exemple 1 : La fraction $\frac{17}{11}$ est irréductible car les nombres 17 et 11 sont premiers entre eux. Cette fraction ne peut pas être simplifiée.

Exemple 2 : La fraction $\frac{20}{8}$ n'est pas irréductible car les nombres 20 et 8 ne sont pas premiers entre eux. Cette fraction peut donc être simplifiée.

2°) Comment rendre une fraction irréductible ?

Pour rendre une fraction irréductible, il existe trois méthodes :

➢ Méthode 1 : Utiliser les critères de divisibilité (voir MODULE 2 de ce chapitre)

Exemple : Pour simplifier la fraction $\frac{84}{90}$, on peut d'abord constater que 84 et 90 sont divisibles par 2.

Donc : $\frac{84}{90}=\frac{42\times\cancel{2}}{45\times\cancel{2}}=\frac{42}{45}$

On peut aussi constater que 42 et 45 sont divisibles par 3. Donc : $\frac{42}{45}=\frac{14\times\cancel{3}}{15\times\cancel{3}}=\frac{14}{15}$

Conclusion : $\frac{84}{90}=\frac{14}{15}$. Cette dernière fraction est irréductible.

Remarque : si vous êtes doué(e) en calcul mental, il ne vous est pas interdit de constater directement que 84 et 90 sont divisibles par 6 et de simplifier directement par 6.

➤ Méthode 2 : Utiliser la décomposition en produit de facteurs premiers.

Tout nombre entier positif supérieur à 1 peut être décomposé en produit de facteurs premiers. Cette méthode consiste à diviser le nombre étudié successivement par les nombres premiers pris dans l'ordre croissant, jusqu'à obtenir 1.

Par exemple, si on veut décomposer 980 en produit de facteurs premiers, on obtient ceci :

980	2	On a d'abord divisé par 2 (qui est le plus petit nombre premier) et obtenu 490
490	2	On a divisé à nouveau par 2 car 490 est aussi divisible par 2. On a obtenu : 245
245	5	On a divisé par 5 car il n'était pas possible de diviser 245 ni par 2 ni par 3. On a obtenu 49.
49	7	On a divisé par 7 car il n'était pas possible de diviser par 5. On a obtenu 7
7	7	On a divisé par 7 car c'était le seul choix possible. On a obtenu 1, ce qui indique que c'est fini.
1		Au final : $980 = 2\times2\times5\times7\times7$

Pour rendre une fraction irréductible, on peut, si la méthode avec les critères de divisibilité est impossible à mettre en œuvre, décomposer le numérateur et le dénominateur en produit de facteurs premiers.

Exemple : On désire rendre irréductible la fraction : $\frac{84}{105}$

Décomposons 84 et 105 en produit de facteurs premiers :
$84 = 2\times2\times3\times7$ et $105 = 3\times5\times7$

Donc : $\frac{84}{105} = \frac{2\times2\times\cancel{3}\times\cancel{7}}{\cancel{3}\times5\times\cancel{7}} = \frac{4}{5}$

➤ Méthode 3 : Utiliser le PGCD du numérateur et du dénominateur

Exemple : On désire rendre irréductible la fraction : $\frac{117}{91}$

On sait déjà (voir module 3 de ce chapitre) que : PGCD (117 ; 91) = 13

Par conséquent : $\frac{117}{91} = \frac{\cancel{13}\times9}{\cancel{13}\times7} = \frac{9}{7}$