➤➤ Module 1 : Généralités sur les suites numériques ⮜⮜

Consulter ce module sur Oxogone.fr

1°) Vocabulaire et notations

➤ Définition : une suite numérique (u_n) est une suite de nombres ordonnés appelés **termes** de la suite. Ces termes sont affectés d'un **rang**.

Exemple : Considérons la suite (u_n) ci-contre.

Notation	Valeur du terme
u_1	3
u_2	11
u_3	24
u_4	29
u_5	34
u_6	41
u_7	53
u_8	72
u_9	89
u_{10}	108

Son premier terme ou terme de rang 1 est $u_1 = 3$.

Le nombre 41 est le $6^{\text{ème}}$ terme de la suite ou terme de rang 6. C'est donc u_6.

De manière générale, le $n^{\text{ième}}$ terme ou terme de rang *n* est noté u_n .

A retenir : (u_n) désigne la suite dans son ensemble et u_n désigne le terme de rang *n*.

➤ Cas particulier : numérotation à partir de zéro.
Une suite (u_n) peut être numérotée à partir de 0. Dans ce cas :

- u_0 est le premier terme de la suite.
- u_n désigne toujours le terme de rang *n* mais il désigne le $(n+1)^{\text{ème}}$ terme.

2°) Suites définies par une relation de récurrence

➤ Définition : On appelle **relation de récurrence** d'une suite (u_n) une relation permettant de calculer u_{n+1} si on connaît u_n .

La connaissance du 1^{er} terme de la suite et de la relation de récurrence permet de connaître tous les termes de la suite. On dit que la suite est définie par la relation de récurrence.

Exemple : Soit (u_n) la suite de 1^{er} terme $u_0 = 183$ et définie par la relation de récurrence : $u_{n+1} = 0,75u_n + 70$.

Il est facile de calculer u_1 à partir de u_0 : $u_1 = 0,75 \times u_0 + 70 = 0,75 \times 183 + 70 = 207,25$

On peut, bien sûr, déterminer tous les autres termes de la suite de la même manière.

3°) Suites définies par une relation explicite

➤ Définition : On appelle **relation explicite** d'une suite (u_n) une relation permettant de calculer directement un terme u_n à partir de son rang *n*.

Exemple : Soit (u_n) la suite définie par la relation : $u_n = 3n + 2$.
Il est facile de calculer, par exemple, u_{100} : $u_{100} = 3 \times 100 + 2 = 302$

4°) Sens de variation d'une suite numérique

➢ Définition :

- Une suite (u_n) est croissante sur un intervalle I de $\mathbb{N}$ si, et seulement si, quel que soit $n \in \mathrm{I}$:

  $n+1 \in \mathrm{I}$ et : $u_{n+1} \geqslant u_n$

- Une suite (u_n) est décroissante sur un intervalle I de $\mathbb{N}$ si, et seulement si, quel que soit $n \in \mathbb{N}$:

  $n+1 \in \mathrm{I}$ et : $u_{n+1} \leqslant u_n$

➢ Méthodes pour étudier le sens de variation d'une suite :

- Méthode 1 : A partir de la relation explicite ou de la relation de récurrence, on exprime la différence : $u_{n+1} - u_n$.
  - ☞ Si, quel que soit $n \in \mathrm{I}$: $n+1 \in \mathrm{I}$ et : $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, la suite (u_n) est croissante sur I.
  - ☞ Si, quel que soit $n \in \mathrm{I}$: $n+1 \in \mathrm{I}$ et : $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, la suite (u_n) est décroissante sur I.

- Méthode 2 : A partir de la relation explicite ou de la relation par récurrence, à condition que les termes de la suite soient positifs, on calcule le quotient : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.
  - ☞ Si, quel que soit $n \in \mathrm{I}$: $n+1 \in \mathrm{I}$; $u_n \geqslant 0$; $u_{n+1} \geqslant 0$ et : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, la suite (u_n) est croissante sur I.
  - ☞ Si, quel que soit $n \in \mathrm{I}$: $n+1 \in \mathrm{I}$; $u_n \geqslant 0$; $u_{n+1} \geqslant 0$ et : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$, la suite (u_n) est décroissante sur I.

- Méthode 3 : A partir de la relation explicite, on considère qu'on peut, à partir de la suite, construite une fonction associée. En étudiant les variations de cette fonction associée (en utilisant la dérivation si c'est possible), on obtient les variations de la suite.

Exemple : soit (u_n) la suite définie par la relation explicite : $u_n = n^2 + 6n - 16$. La fonction associée à cette suite est la fonction $f : x \mapsto f(x) = x^2 + 6x - 16$. Il suffit d'étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$ pour obtenir les variations de la suite (u_n).

5°) Majorant, minorant et suites bornées

➢ Définitions :

- Une suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que, quel que soit l'entier naturel n : $u_n \leqslant \mathrm{M}$.
  Le réel M est un **majorant** de la suite (u_n).
- Une suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que, quel que soit l'entier naturel n : $u_n \geqslant \mathrm{m}$.
  Le réel m est un **minorant** de la suite (u_n).
- Une suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Visiter le site

6°) Représentation graphique d'une suite

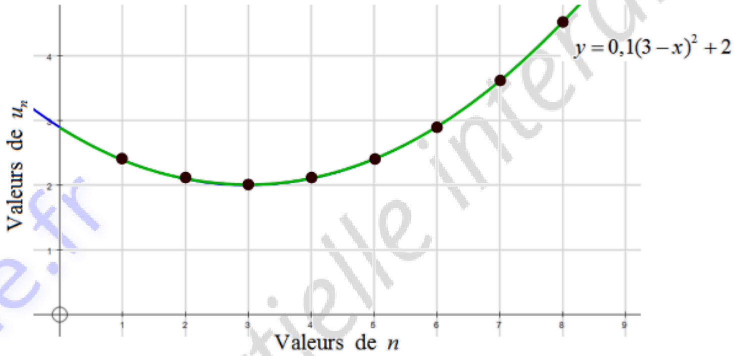
➢ Représentation graphique d'une suite définie par une relation explicite :

On utilise, comme on l'a vu précédemment, la fonction associée à la suite.

Exemple : la suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par la relation : $u_n = 0{,}1(3-n)^2 + 2$.

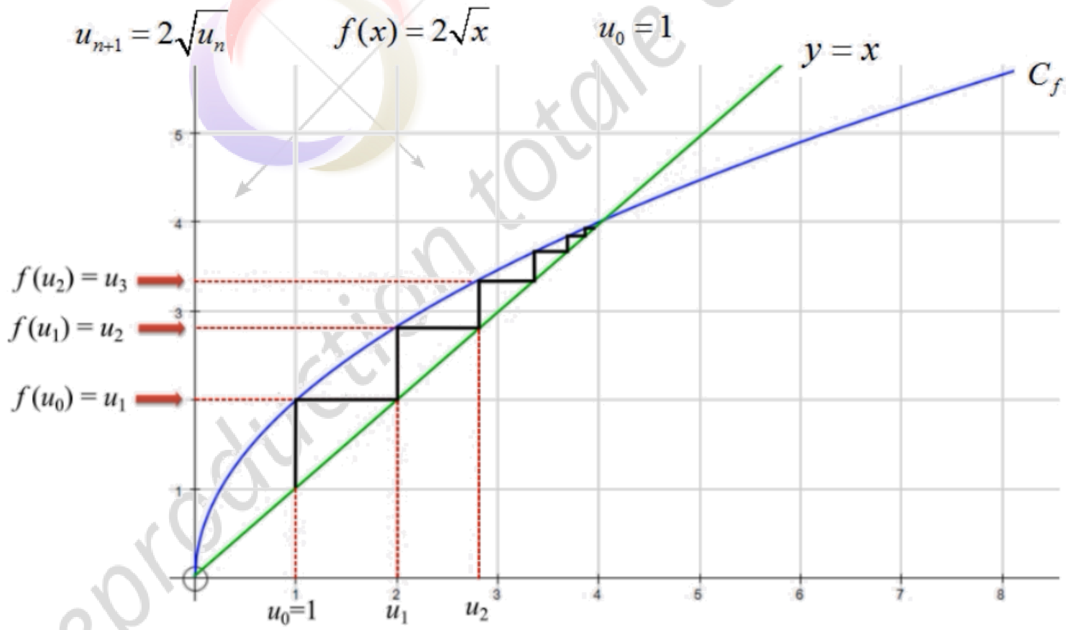
On va associer à la suite (u_n) la fonction : $f : x \mapsto f(x) = 0{,}1(3-x)^2 + 2$; $x \in \mathbb{N}$

La courbe représentative de la restriction de f à $\mathbb{R}^+$ (courbe verte) nous permet de représenter les termes de la suite (u_n) sous la forme de points.



➢ Représentation graphique d'une suite définie par une relation de récurrence :

En utilisant la fonction associée et la droite d'équation $y = x$, on obtient une représentation graphique de ce genre :



Ce type de graphique nous permet de conjecturer que la suite représentée ici est croissante et qu'elle admet 4 pour majorant.

Vous trouverez la méthode à suivre pour élaborer ce type de graphique dans le cours interactif correspondant.

➢➢ Module 2 : Suites arithmétiques ≺≺

Consulter ce module sur Oxogone.fr

1°) Notion de suite arithmétique

➢ Définition : Une suite (u_n) est **arithmétique** s'il existe un nombre réel r tel que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Le réel r est la **raison** de la suite arithmétique (u_n).

2°) Relation explicite d'une suite arithmétique

➢ Propriété essentielle : Soit (u_n) une suite arithmétique de 1$^{\text{er}}$ terme u_0 et de raison r.

Quel que soit $n \in \mathbb{N}$: $u_n = u_0 + nr$

Exemple : Soit (u_n) la suite arithmétique de 1$^{\text{er}}$ terme $u_0 = 21$ et de raison $r = 3,7$.

On cherche u_{50} . D'après la relation explicite, en remplaçant n par 50, on obtient : $u_{50} = u_0 + 50 \times r$.

Comme, par hypothèse, $u_0 = 21$ et $r = 3,7$: $u_{50} = 21 + 50 \times 3,7 = 206$.

3°) Somme des termes d'une suite arithmétique

➢ Propriété : On désigne par S la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique. Nous avons :

$$\text{S} = \frac{(\text{Nombre de termes}) \times \left(1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme}\right)}{2}$$

Exemple : soit (u_n) la suite arithmétique de 1$^{\text{er}}$ terme $u_0 = 7,3$ et de raison $r = 5,2$

On désire calculer $\text{S} = u_8 + u_9 + \ldots + u_{20}$

Il y a 13 termes dans cette somme. Le 1$^{\text{er}}$ terme de la somme est u_8 et le dernier terme u_{20} .

Donc : $\text{S} = \dfrac{13 \times (u_8 + u_{20})}{2}$.

Il reste à calculer u_8 et u_{20} (voir ci-dessus : 2°) Relation explicite).

On obtient : $u_8 = u_0 + 8 \times r = 7,3 + 8 \times 5,2 = 48,9$ et $u_{20} = u_0 + 20 \times r = 7,3 + 20 \times 5,2 = 111,3$.

Par conséquent : $\text{S} = \dfrac{13 \times (48,9 + 111,3)}{2} = 1041,3$

4°) Sens de variation et représentation graphique d'une suite arithmétique

➢ Sens de variation :

- une suite arithmétique (u_n) est croissante si sa raison *r* est strictement positive.
- une suite arithmétique (u_n) est décroissante si sa raison *r* est strictement négative.
- une suite arithmétique (u_n) est constante si sa raison *r* est nulle.

➢ Représentation graphique :

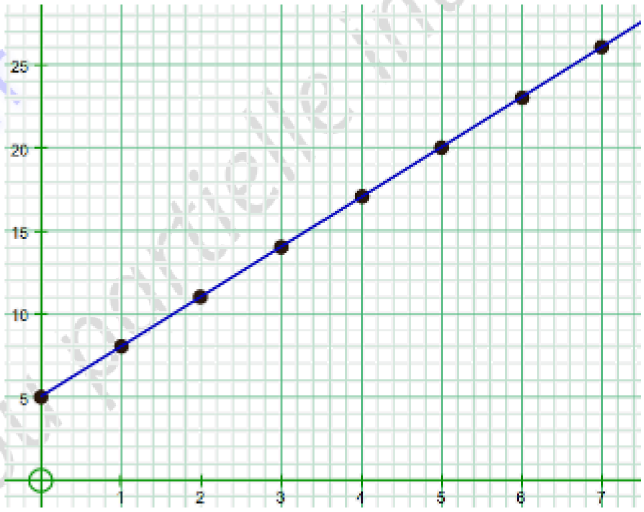
La suite arithmétique (u_n) de 1^{er} terme u_0 et de raison r est représentée par la droite d'équation :

$$y = r\,x + u_0$$

Exemple : Soit (u_n) la suite arithmétique de 1^{er} terme $u_0 = 5$ et de raison $r = 3$ a été représentée ci-contre par la droite d'équation : $y = 3x + 5$.

La raison *r* correspond au coefficient directeur de la droite.

Le 1^{er} terme u_0 correspond à l'ordonnée à l'origine de la droite.



➢➢ Module 3 : Suites géométriques ≺≺

Consulter ce module sur Oxogone.fr

1°) Notion de suite géométrique

➢ Définition : Une suite (u_n) est **géométrique** s'il existe un nombre réel q tel que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n \times q$$

Le réel *q* est la **raison** de la suite géométrique (u_n).

2°) Relation explicite d'une suite géométrique

➢ Propriété essentielle : Soit (u_n) une suite géométrique de 1^{er} terme u_0 et de raison *q*.

Quel que soit $n \in \mathbb{N}$: $u_n = u_0 \times q^n$

Visiter le site Oxogone.fr Cours de maths en ligne

Exemple : Soit (u_n) la suite géométrique de 1^er^ terme $u_0 = 120$ et de raison $q = 1,06$.

On cherche u_{15}. D'après la relation explicite, en remplaçant n par 15, on obtient : $u_{15} = u_0 \times q^{15}$.

Comme, par hypothèse, $u_0 = 120$ et $q = 1,06$: $u_{15} = 120 \times 1,06^{15} \simeq 287,59$

➤ Suites géométriques et variations en pourcentages :

- lorsqu'une grandeur augmente régulièrement d'un même taux t%, alors les valeurs successives prises par cette grandeur forment une suite géométrique dont la raison est : $q = 1 + \dfrac{t}{100}$.

- lorsqu'une grandeur diminue régulièrement d'un même taux t%, alors les valeurs successives prises par cette grandeur forment une suite géométrique dont la raison est : $q = 1 - \dfrac{t}{100}$.

Vous remarquerez que $1 + \dfrac{t}{100}$ et $1 - \dfrac{t}{100}$ sont les coefficients multiplicateurs associés à ces variations en pourcentages.

3°) Somme des termes d'une suite géométrique

➤ Propriété : On désigne par S la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique. Nous avons :

$$S = 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1 - q^{\text{Nombre de termes}}}{1 - q}$$

Exemple : Soit (u_n) la suite géométrique de 1^er^ terme $u_0 = 3,8$ et de raison $q = 1,4$.

On désire calculer la somme des 10 premiers termes de la suite (u_n).

Nous avons : $S = 3,8 \times \dfrac{1 - 1,4^{10}}{1 - 1,4} \simeq 265,3$