➢➢ Module 1 : Rappels de Seconde ≺≺

➢ Définitions et propriétés essentielles :

• Une **expérience aléatoire** est une expérience dont le résultat n'est pas connu à l'avance.

• Les **issues** d'une expérience aléatoire sont les résultats possibles de cette expérience aléatoire.
L'ensemble des issues d'une expérience aléatoire est noté Ω.

• La **probabilité** d'une issue est le nombre théorique dont se rapproche la fréquence de réalisation de l'issue si on reproduit un grand nombre de fois l'expérience dans les mêmes conditions.

• Une loi de probabilité est **équirépartie** si toutes les issues ont la même probabilité. On parle alors de situation d'**équiprobabilité**.

• Un **événement** d'une expérience aléatoire est un ensemble formé d'une ou plusieurs issues de cette expérience aléatoire.

• Un **événement impossible** est un événement dont la probabilité est nulle.

• Un **événement certain** est un événement dont la probabilité est égale à 1.

• Quel que soit l'événement A : $0 \leqslant p(\mathrm{A}) \leqslant 1$.

➢ Intersection – Réunion – Evénement contraire :

• **Intersection d'événements** : Soient A et B deux ensembles. Considérons que ces ensembles sont composés d'issues d'une même expérience aléatoire. On appelle intersection de ces deux ensembles (ou de ces deux événements) et on note $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$, l'ensemble formé des issues communes à A et à B.

• **Réunion d'événements** : Soient A et B deux ensembles. Considérons que ces ensembles sont composés d'issues d'une même expérience aléatoire. On appelle réunion de ces deux ensembles (ou de ces deux événements) et on note $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$, l'ensemble formé des issues qui appartiennent à A ou à B.

Formule importante : Quels que soient les événements A et B d'une même expérience aléatoire :

$$p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$$

• **Evénements incompatibles** : : deux événements d'une même expérience aléatoire sont **incompatibles** s'ils n'ont aucune issue commune.

☞ Conséquence : si A et B sont deux événements incompatibles d'une même expérience aléatoire, alors :

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing \text{ et } p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B})$$

• **Evénement contraire** : soit A un événement d'une expérience aléatoire. On appelle **événement contraire** de A, et on note $\overline{\mathrm{A}}$ l'événement formé de toutes les issues de Ω qui ne sont pas dans A.

☞ Conséquence : quel que soit l'événement A : $p(\mathrm{A}) + p(\overline{\mathrm{A}}) = 1$

➤➤ Module 2 : Arbres probabilistes pondérés ◄◄

Consulter ce module sur Oxogone.fr

Exemple : dans le tableau ci-contre sont résumées les informations concernant la location d'instruments de musique dans un magasin.

Ce tableau signifie que 48% des clients louent un piano, 31% louent une guitare et les autres un violon. La dernière colonne nous indique que 22% des clients ayant loué un piano finissent par l'acheter. Ce taux s'élève à 27% pour les clients qui louent une guitare et 14% pour ceux qui louent un violon.

	Choix des clients	Acheteurs
Piano	48%	22%
Guitare	31%	27%
Violon	Reste	14%

Objectif : déterminer la probabilité qu'un client qui loue un instrument finisse par l'acheter.

Méthode à suivre :

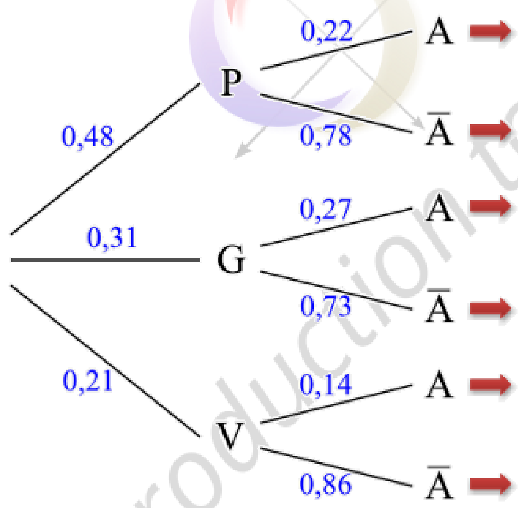
❶ On résume les informations du tableau à l'aide d'un arbre probabiliste pondéré.

❷ Pour chaque branche de l'arbre, on calcule, à l'aide d'un produit, la probabilité correspondante.

❸ On termine en additionnant les probabilités en accord avec l'objectif fixé.

Voici l'arbre pondéré. On a désigné par P l'événement : « le client loue un piano », par G l'événement : « le client loue une guitare » et par V l'événement : « le client loue un violon ».

On désigne par A l'événement : « Le client achète l'instrument qu'il a loué » et par $\overline{A}$ son événement contraire.



$p(P \cap A) = 0,48 \times 0,22 = 0,1056$

$p(P \cap \overline{A}) = 0,48 \times 0,78 = 0,3744$

$p(G \cap A) = 0,31 \times 0,27 = 0,0837$

$p(G \cap \overline{A}) = 0,31 \times 0,73 = 0,2263$

$p(V \cap A) = 0,21 \times 0,14 = 0,0294$

$p(V \cap \overline{A}) = 0,21 \times 0,86 = 0,1806$

1

Pour atteindre l'objectif et calculer p (A), c'est-à-dire la probabilité qu'un client finisse par acheter l'instrument qu'il a loué, il suffit d'additionner $p(P \cap A)$; $p(G \cap A)$ et $p(V \cap A)$

On obtient : $p(A) = 0,1056 + 0,0837 + 0,0294 = 0,2187$

Visiter le site Oxogone.fr Cours de maths en ligne

➢➢ Module 3 : Variables aléatoires ≺≺

Consulter ce module sur Oxogone.fr

1°) Loi de probabilité d'une variable aléatoire

➢ Définitions : Une **variable aléatoire** est un nombre qui prend comme valeurs les issues possibles d'une expérience aléatoire. Définir une **loi de probabilité** d'une variable aléatoire consiste à affecter à chaque valeur prise par cette variable une probabilité.

Règle importante : la somme des probabilités des valeurs possibles d'une variable aléatoire doit être égale à 1.

Exemple : dans le cadre d'un jeu, les participants achètent un ticket 2 €. L'organisateur du jeu a vendu 5 tickets gagnants qui rapportent 20 €, 15 tickets gagnants qui rapportent 5 € et 80 tickets perdants qui rapportent 0 €.

Soit X la variable aléatoire qui prend comme valeurs le gain possible pour un joueur. Cette variable peut prendre 3 valeurs :

- 18 (le joueur a acheté 2 € un ticket qui rapporte 20 €)
- 3 (le joueur a acheté 2 € un ticket qui rapporte 5 €)
- - 2 (le joueur a acheté 2 € un ticket qui rapporte 0 €)

Nous dirons que l'univers Ω de cette variable aléatoire est l'ensemble formé de ces valeurs possibles :
$\Omega = \{-2; 3; 18\}$

On peut affecter à chacune de ces trois valeurs une probabilité.

En effet, il y a 5 tickets sur 100 qui correspondent à la valeur 18 de la variable aléatoire X. Cette valeur se réalise avec une probabilité : $p(\text{X}=18)=\dfrac{5}{100}=0{,}05$.

De la même manière, on obtient : $p(\text{X}=3)=\dfrac{15}{100}=0{,}15$ et $p(\text{X}=-2)=\dfrac{80}{100}=0{,}8$

On peut résumer ces informations dans un tableau :

x_i	18	3	-2
$p(\text{X}=x_i)$	0,05	0,15	0,8

On constate que la somme des probabilités est égale à 1.

2°) Espérance mathématique d'une variable aléatoire

➢ Formule de calcul :

Soit X une variable aléatoire prenant des valeurs x_i affectées chacune d'une probabilité $p(\text{X}=x_i)$.

L'espérance mathématique de cette variable aléatoire est $\text{E}(\text{X})=\sum_{i=1}^{n} x_i \times p(\text{X}=x_i)$

Exemple : reprenons l'exemple développé précédemment :

$\text{E}(\text{X})=18\times 0{,}05+3\times 0{,}15+(-2)\times 0{,}8=-0{,}25$. Chaque personne achetant un ticket perd en moyenne 25 centimes d'euros.

Visiter le site Oxogone.fr Cours de maths en ligne

Remarque : lorsque la variable aléatoire définie à partir d'un jeu a une espérance mathématique nulle, on dit que le jeu est **équitable**.

3°) Variance et écart-type d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire prenant des valeurs x_i affectées chacune d'une probabilité $p(\mathrm{X}=x_i)$. On désigne par E(X) l'espérance mathématique de cette variable aléatoire.

- La variance de la variable X est : $\mathrm{V(X)} = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \mathrm{E(X)}\right)^2 \times p(\mathrm{X}=x_i)$
- L'écart-type de la variable X est : $\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{\mathrm{V(X)}}$

➢➢ Module 4 : Loi binomiale ➢➢

Consulter ce module sur Oxogone.fr

1°) Loi de Bernoulli

➢ Définitions :

On appelle « épreuve de Bernoulli » une expérience aléatoire qui n'a que deux issues possibles : « succès » et « échec ». Si on associe à une épreuve de Bernoulli une variable aléatoire X qui prend comme valeurs : 1 si l'épreuve de Bernoulli est un succès et 0 si l'épreuve de Bernoulli est un échec, on dit que la variable X est une variable de Bernoulli ou que X suit une loi de Bernoulli.

Si on désigne par p la probabilité du succès, c'est-à-dire si $p(\mathrm{X}=1)=p$, alors la probabilité de l'échec est : $1-p$, c'est-à-dire : $p(\mathrm{X}=0)=1-p$. On dit alors que p est le paramètre de la loi de Bernoulli.

➢ Espérance mathématique et variance :

Si une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, alors l'espérance mathématique de cette variable est : $\mathrm{E(X)}=p$ et sa variance est : $\mathrm{V(X)}=p(1-p)$.

2°) Loi binomiale

On répète n fois et dans les mêmes conditions une même épreuve de Bernoulli de paramètre p.

On désigne par X la variable aléatoire qui prend comme valeurs le nombre de succès obtenus lors de la répétition des épreuves de Bernoulli. La variable X suit une loi binomiale de paramètres n et p. $\mathrm{X} \sim \mathrm{B}(n\,;p)$.

Formule essentielle : Si $\mathrm{X} \sim \mathrm{B}(n\,;p)$ alors $p(\mathrm{X}=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$

Visiter le site Oxogone.fr Cours de maths en ligne

3°) Coefficients binomiaux

Dans la formule essentielle, le réel $\binom{n}{k}$ est un coefficient binomial. Les coefficients binomiaux peuvent être obtenus très facilement à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice. On peut aussi les lire dans un schéma appelé « triangle de Pascal ».

Pour trouver le coefficient binomial $\binom{n}{k}$, il faut aller à l'intersection de la (n + 1)ème ligne et de la (k + 1)ème colonne.

Exemple : Pour trouver le coefficient $\binom{4}{2}$, il faut aller à l'intersection de la 5ème ligne et de la 3ème colonne.

On trouve : $\binom{4}{2} = 6$

1									
1	1								
1	2	1							
1	3	3	1						
1	4	6	4	1					
1	5	10	10	5	1				
1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1		
1	8	28	56	70	56	28	8	1	
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

4°) Propriétés des coefficients binomiaux

- Formule de Pascal : si $n \geqslant 0$; $k \geqslant 0$ et $k < n$ alors : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

- Autres propriétés :

  - Quel que soit $n \in \mathbb{N}$: $\binom{n}{0} = 1$
  - Quel que soit $n \in \mathbb{N}$: $\binom{n}{n} = 1$
  - Quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$: $\binom{n}{1} = n$
  - Quels que soient n et k : si $n \geqslant 0$; $k \geqslant 0$ et $k < n$ alors : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

5°) Paramètres d'une loi binomiale

Soit X une variable aléatoire. Si X ~ B (n ; p) alors :

- $\mathrm{E(X)} = n \times p$
- $\mathrm{V(X)} = n \times p \times (1-p)$
- $\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{\mathrm{V(X)}} = \sqrt{n \times p \times (1-p)}$

➤➤ Module 5 : Loi binomiale et intervalle de fluctuation ≺≺

Consulter ce module sur Oxogone.fr

1°) Rappels

Dans une population donnée, un caractère est présent dans une proportion *p*. On prélève dans cette population un échantillon de taille *n*. On est certain à au moins 95% que la fréquence f du caractère dans l'échantillon est comprise dans l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% : $\mathrm{I}=\left[\, p-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, p+\frac{1}{\sqrt{n}}\,\right]$.

2°) Loi binomiale et intervalle de fluctuation

Dans une population donnée, un caractère est présent dans une proportion *p*. On prélève dans cette population un échantillon de taille *n*. Soit X la variable aléatoire qui prend comme valeurs le nombre d'individus ayant le caractère étudié dans l'échantillon prélevé. Nous avons : $X \sim B(n\,;p)$.

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% est alors : $\mathrm{I}=\left[\frac{a}{n}\,;\frac{b}{n}\right]$.

Le réel *a* est le plus petit entier tel que : $p(X \leqslant a) > 0{,}025$.

Le réel *b* est le plus petit entier tel que : $p(X \leqslant b) > 0{,}975$.

Vous trouverez dans le cours interactif une méthode détaillée décrivant comment trouver la valeur des réels *a* et *b* à partir de la table cumulative des valeurs de la loi binomiale.