➢➢ Module 1 : Pré-requis ➣➣

Consulter ce module sur Oxogone.fr

Pour réviser les acquis de Première sur les suites numériques, veuillez consulter le résumé du chapitre correspondant.

➢➢ Module 2 : Compléments sur les suites géométriques ➣➣

Consulter ce module sur Oxogone.fr

RAPPELS

1°) Découverte de la notion de suite géométrique

➢ Définition : Une suite (u_n) est **géométrique** s'il existe un nombre réel q tel que, quel que soit $n\in\mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n \times q$$

Le réel q est la **raison** de la suite géométrique (u_n).

2°) Relation explicite d'une suite géométrique

➢ Propriété essentielle : Soit (u_n) une suite géométrique de 1er terme u_0 et de raison q.

Quel que soit $n\in\mathbb{N}$: $u_n = u_0 \times q^n$

➢ Suites géométriques et variations en pourcentages :

- lorsqu'une grandeur augmente régulièrement d'un même taux t%, alors les valeurs successives prises par cette grandeur forment une suite géométrique dont la raison est : $q = 1 + \dfrac{t}{100}$.
- lorsqu'une grandeur diminue régulièrement d'un même taux t%, alors les valeurs successives prises par cette grandeur forment une suite géométrique dont la raison est : $q = 1 - \dfrac{t}{100}$.

Vous remarquerez que $1+\dfrac{t}{100}$ et $1-\dfrac{t}{100}$ sont les coefficients multiplicateurs associés à ces variations en pourcentages.

3°) Somme des termes d'une suite géométrique

➢ Propriété : On désigne par S la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique. Nous avons :

$$S = 1^{er}\text{ terme } \times \frac{1-q^{\text{Nombre de termes}}}{1-q}$$

COMPLEMENTS

1°) Sens de variation d'une suite géométrique

Avertissement : le programme de Terminales ES et L n'étudie que des suites géométriques de raison strictement positive.

Pour étudier le sens de variation d'une suite géométrique, on appliquera les deux règles suivantes :

- Règle 1 : Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q > 0$
  - Si $q > 1$: la suite (u_n) est croissante
  - Si $0 < q < 1$: la suite (u_n) est décroissante
  - Si $q = 1$: la suite (u_n) est constante
- Règle 2 : Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q > 0$
  - Si $u_0 > 0$, la suite (u_n) a le même sens de variation que celle ayant la même raison et $u_0 = 1$
  - Si $u_0 < 0$, la suite (u_n) a un sens de variation contraire à celle ayant la même raison et $u_0 = 1$

Exemple : Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 122$ et de raison $q = 0,87$

Comme $u_0 > 0$, d'après la règle 2, cette suite a le même sens de variation que la suite de premier terme $u_0 = 1$ et raison $q = 0,87$. Or, d'après la règle 1, comme : $0 < q < 1$, cette suite est décroissante.

2°) Limite d'une suite géométrique

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q > 0$. Concernant la limite de la suite (u_n), 4 cas peuvent se présenter :

Cas n°1 : $u_0 > 0$ et $q > 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Cas n°2 : $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0^+$

Cas n°3 : $u_0 < 0$ et $0 < q < 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0^-$

Cas n°4 : $u_0 < 0$ et $q > 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Exemple : Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 122$ et de raison $q = 0,87$

Comme $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$, nous sommes dans le cas n°2 : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0^+$

Cas particulier : si $q = 1$, la suite (u_n) est constante et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_0$

Visiter le site Oxogone.fr Cours de maths en ligne

➤➤ Module 3 : Suites arithmético-géométriques ≺≺

Consulter ce module sur Oxogone.fr

1°) Notion de suite arithmético-géométrique

➤ **Définition** : Soit (u_n) une suite numérique. S'il existe deux nombres réels a et b non nuls tels que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = a \times u_n + b$, alors la suite (u_n) est arithmético-géométrique.

Exemple : la suite (u_n) telle que : $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = -4u_n + 3$ est arithmético-géométrique avec $a = -4$ et $b = 3$

2°) Représentation graphique d'une suite arithmético-géométrique

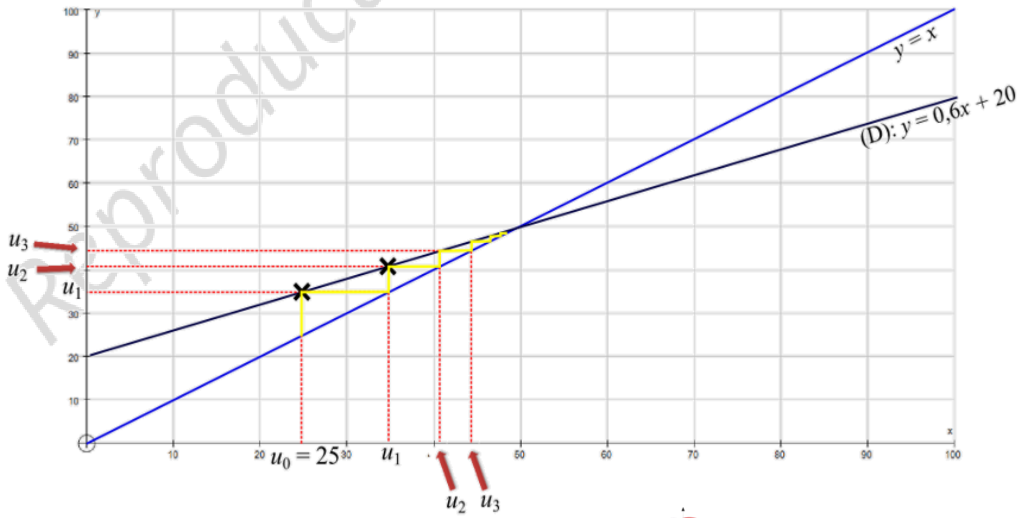
On peut étudier le comportement d'une suite arithmético-géométrique à l'aide d'un graphique spécifique. Pour réaliser ce graphique, on définit une fonction associée à la suite étudiée.

La fonction associée à la suite arithmético-géométrique (u_n) définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = a \times u_n + b$ est la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$.

On trace, dans un même repère, la courbe représentative de la fonction f (qui est donc une droite (D) puisque la fonction f est affine) et la droite d'équation $y = x$

On place u_0 sur l'axe des abscisses. A l'aide de la droite (D), on obtient la valeur de u_1 sur l'axe des ordonnées. On utilise alors la droite d'équation $y = x$ pour reporter la valeur de u_1 sur l'axe des abscisses. On utilise la droite (D) pour obtenir la valeur de u_2 sur l'axe des ordonnées. On utilise la droite d'équation $y = x$ pour reporter la valeur de u_2 sur la axe des abscisses et ainsi de suite pour u_3 ; u_4 ... On obtient alors une ligne brisée (en jaune sur la figure ci-dessous) qui permet de conjecturer le sens de variation et la limite de la suite.

Exemple : Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique de premier terme $u_0 = 25$ et définie par la relation : $u_{n+1} = 0{,}6u_n + 20$. Sa représentation graphique est donnée ci-dessous. Elle permet de conjecturer que cette suite est croissante et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 50$



Visiter le site

3°) Etude d'une suite arithmético-géométrique à l'aide d'une suite géométrique auxiliaire

Exemple : Soit (u_n) la suite définie par la relation : $\begin{cases} u_0 = 2000 \\ u_{n+1} = 0{,}88u_n + 384 \end{cases}$. On désire déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

- Etape 1 : On fait intervenir la suite (v_n) telle que : $v_n = u_n - 3200$ (quelque soit $n \in \mathbb{N}$) (rassurez-vous, dans les sujets de Bac, cette suite est donnée)

- Etape 2 : On calcule v_0. Puisque $v_n = u_n - 3200$, nous avons $v_0 = u_0 - 3200 \Leftrightarrow v_0 = 2000 - 3200 = -1200$

- Etape 3 : on démontre que la suite (v_n) est géométrique (c'est l'étape la plus difficile).

Pour cela, on part du principe que, si (v_n) est géométrique, alors il existe un réel q tel que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = v_n \times q$

Or, puisque $v_n = u_n - 3200$, nous avons :
$v_{n+1} = u_{n+1} - 3200$ soit $v_{n+1} = 0{,}88 \times u_n + 384 - 3200$ soit $v_{n+1} = 0{,}88 \times u_n - 2816$

Comme, par ailleurs, $2816 = 0{,}88 \times 3200$, nous obtenons :
$v_{n+1} = 0{,}88 \times u_n - 0{,}88 \times 3200$ soit $v_{n+1} = 0{,}88(u_n - 3200)$ soit $v_{n+1} = 0{,}88 \times v_n$

La suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = -1200$ et de raison $q = 0{,}88$

- Etape 4 : Comme on connaît son premier terme et sa raison, il facile de déduire la limite de la suite géométrique (v_n) : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0^-$

- Etape 5 : Puisque, quel que soit $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_n - 3200$, nous avons : $u_n = v_n + 3200$, donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n + 3200 = 0^- + 3200 = 3200$

4°) Relation explicite d'une suite arithmético-géométrique

Il est facile d'obtenir la relation explicite d'une suite arithmético-géométrique à l'aide de la méthode que nous venons de voir.

Exemple : reprenons l'exemple de la suite (u_n) définie par la relation : $\begin{cases} u_0 = 2000 \\ u_{n+1} = 0{,}88u_n + 384 \end{cases}$

La suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = -1200$ et de raison $q = 0{,}88$

Par conséquent : quel que soit $n \in \mathbb{N}$: $v_n = -1200 \times 0{,}88^n$

Comme, par ailleurs : $u_n = v_n + 3200$ (quel que soit $n \in \mathbb{N}$), nous obtenons :

$$u_n = -1200 \times 0{,}88^n + 3200 \quad \text{(c'est la relation explicite cherchée)}$$

Visiter le site Oxogone.fr Cours de maths en ligne