➤➤ Module 1 : Etude de la fonction logarithme népérien ➤➤

Consulter ce module sur Oxogone.fr

1°) La fonction logarithme népérien

➤ Définition : on appelle fonction logarithme népérien la fonction f qui, à tout réel x strictement positif, associe son logarithme népérien, noté $\ln(x)$.

➤ Propriétés essentielles

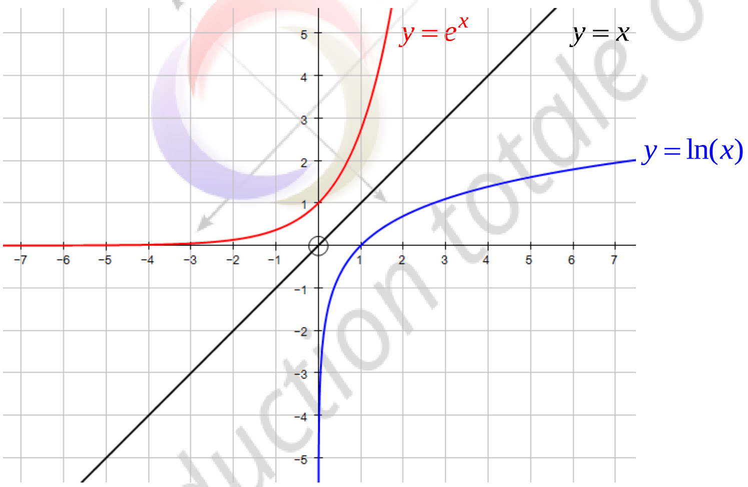
La fonction logarithme népérien est la fonction réciproque de la fonction exponentielle. Ceci entraîne les deux propriétés suivantes :

- Pour tout nombre réel strictement positif x : $e^{\ln(x)} = x$
- Pour tout nombre réel x : $\ln(e^x) = x$

➤ Courbe représentative et sens de variation

La fonction logarithme népérien est croissante sur son ensemble de définition $\mathbb{R}_+^*$

Voici sa courbe représentative (en bleu). Comme on peut le voir, les courbes représentatives des fonctions logarithme népérien (en bleu) et exponentielle (en rouge) sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (en noir). Cela est dû au fait que ces deux fonctions sont réciproques.



Vous remarquerez, et vous garderez à l'esprit, que : $\ln(1) = 0$

2°) Propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs et soit n un réel :

$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$ $\qquad$ $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ $\qquad$ $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$

$\ln(a^n) = n \times \ln(a)$ $\qquad$ $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2} \times \ln(a)$

Visiter le site Oxogone.fr Cours de maths en ligne

➤➤ Module 2 : Equations et inéquations ≺≺

Consulter ce module sur Oxogone.fr

1°) Résolution d'équations comportant des logarithmes

Pour résoudre des équations comportant des logarithmes népériens, on utilisera le plus souvent les propriétés suivantes :

- Pour tous réels strictement positifs a et b : $\ln(a)=\ln(b) \Leftrightarrow a=b$
- Pour tout réel strictement positif a : $e^{\ln(a)}=a$

Exemple : On désire résoudre l'équation : $\ln(x+3)=7$

❶ On précise que $\ln(x+3)$ n'existe que si $x+3>0$, soit si : $x>-3$

❷ On utilise la propriété : $e^x=e^y \Leftrightarrow x=y$ pour établir que : $\ln(x+3)=7 \Leftrightarrow e^{\ln(x+3)}=e^7$

❸ On utilise la propriété $e^{\ln(a)}=a$ pour établir que : $e^{\ln(x+3)}=x+3$

❹ On remplace dans l'équation et on obtient : $x+3=e^7$, soit $x=e^7-3$

❺ On vérifie que la solution trouvée, soit e^7-3, est bien conforme à ce qui a été établi à l'étape ❶

❻ On peut conclure : $S=\left\{e^7-3\right\}$

2°) Résolution d'équations à l'aide du logarithme

a) Résolution d'équations comportant des exponentielles

On désire résoudre l'équation : $3e^x-12=0$.

On obtient facilement : $3e^x-12=0 \Leftrightarrow e^x=4$

On utilise, après avoir vérifié que, quel que soit $x\in\mathbb{R}$, les réels e^x et 4 sont strictement positifs, la propriété : $\ln(a)=\ln(b) \Leftrightarrow a=b$, pour établir que : $e^x=4 \Leftrightarrow \ln(e^x)=\ln(4)$

Or, pour tout nombre réel x : $\ln(e^x)=x$.

L'équation s'écrit alors : $x=\ln(4)$

On peut conclure : $S=\{\ln(4)\}$

b) Résolution d'équations de la forme : $x^n=k$

On désire résoudre l'équation : $x^7=2187$

On utilise la propriété $\ln(a)=\ln(b) \Leftrightarrow a=b$ pour établir que : $x^7=2187 \Leftrightarrow \ln(x^7)=\ln(2187)$, sans oublier de préciser que x désigne un réel strictement positif.

On utilise ensuite la propriété : $\ln(a^n)=n\times\ln(a)$ pour établir que : $\ln(x^7)=7\times\ln(x)$

En remplaçant dans l'équation, on obtient : $7\times\ln(x)=\ln(2187)$, soit $\ln(x)=\dfrac{\ln(2187)}{7}$

On utilise alors la propriété : $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$ pour établir que : $\ln(x) = \frac{\ln(2187)}{7} \Leftrightarrow e^{\ln(x)} = e^{\frac{\ln(2187)}{7}}$

Or, pour tout réel x strictement positif : $e^{\ln(x)} = x$. Par conséquent, l'équation s'écrit : $x = e^{\frac{\ln(2187)}{7}}$

Conclusion : $S = \left\{ e^{\frac{\ln(2187)}{7}} \right\}$

3°) Logarithmes et suites numériques

Les techniques décrites précédemment peuvent être utilisées lors de l'étude de suites géométriques ou arithmético-géométriques.

Exemple : Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $q = 1,2$. Nous savons que cette suite est croissante. On voudrait déterminer le rang à partir duquel le terme u_n devient supérieur à 100.

Nous savons que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$: $u_n = u_0 \times q^n$ soit $u_n = 4 \times 1,2^n$

Résoudre le problème revient donc à résoudre l'équation : $4 \times 1,2^n = 100$, soit $1,2^n = \frac{100}{4}$, soit $1,2^n = 25$

Ce type d'équation ne peut-être résolue qu'en utilisant le logarithme népérien.

Comme, quel que soit $n \in \mathbb{N}$: $1,2^n > 0$ et que 25 > 0, nous avons : $1,2^n = 25 \Leftrightarrow \ln(1,2^n) = \ln(25)$

Soit $n \times \ln(1,2) = \ln(25)$, soit $n = \frac{\ln(25)}{\ln(1,2)}$, soit $n \simeq 17,65$

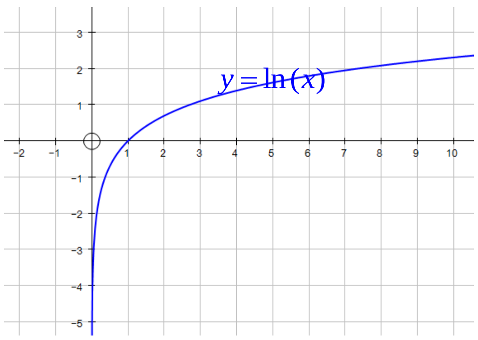
Conclusion : le premier terme supérieur à 100 est u_{18}

Remarque : le même raisonnement peut être utilisé avec les suites arithmético-géométriques.

4°) Logarithme népérien et inéquations

Les résolutions d'inéquations impliquant la fonction logarithme népérien sont basées essentiellement sur les techniques étudiées précédemment lors de la résolution des équations, et aussi sur quelques principes généraux, faciles à retrouver à l'aide de la courbe représentative de cette fonction.

- La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur son ensemble de définition. C'est-à-dire que, pour tous réels x et y strictement positifs : $\ln(x) > \ln(y) \Leftrightarrow x > y$



- Soit x un nombre réel strictement positif :
  - $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$
  - $\ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

➤➤ Module 3 : Logarithmes et dérivation ➤➤

Consulter ce module sur Oxogone.fr

1°) Fonction dérivée de la fonction logarithme népérien

➤ Propriété : La fonction logarithme népérien $f : x \mapsto \ln(x)$ est définie et dérivable sur l'intervalle $\mathrm{I} =]0 ; +\infty[$

Quel que soit $x \in \mathrm{I}$: $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

➤ La formule fondamentale :

Soit u une fonction définie, dérivable et à valeurs strictement positives sur un intervalle I. La fonction f définie sur I par la relation : $f(x) = \ln\left(u(x)\right)$ est définie et dérivable sur I et , quel que soit $x \in I$: $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

Exemple : Soit f la fonction définie par la relation : $f(x) = \ln(x-3)$

Nous avons : $D_f =]\,3 ; +\infty[$. La fonction f est définie et dérivable sur son ensemble de définition.

De plus, quel que soit $x \in D_f$: $x - 3 > 0$. Par conséquent : $f'(x) = \dfrac{1}{x-3}$

2°) Continuité

➤ Propriété : Soit u une fonction définie et à valeurs strictement positives sur un intervalle I. Soit f la fonction définie sur I par la relation : $f(x) = \ln\left(u(x)\right)$. Si la fonction u est continue sur I, alors la fonction f est continue sur I